Révisions de Terminale à Sup : exercices de calcul[1]

1 Pour se faire la main...

Exercice 1. Calculer de deux façons

$$A = \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + 1\right) - \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{5} - 2\right) + \left(-2 + \frac{5}{3}\right)$$

- en calculant d'abord chaque parenthèse
- en supprimant les parenthèses et en regroupant les termes qui donnent un résultat simple

Réponse : voir page 18

Exercice 2. Supprimer les parenthèses et les crochets dans les expressions suivantes (*les réponses doivent être ordonnées, par exemple selon l'ordre alphabétique*) :

$A = ((a-c)-(a-b))-((b-c)-(a+c))$

$B = (a-b+c)-(2a-3b-4c)+(b-a)$

$C = [12-(a-b+6)]-[15+(b-a-15)]$

$D = [(a-b)-(5-a)]+[b-7-(a-3)]$

Réponse : voir page 18

Exercice 3. Effectuer les opérations suivantes :

$$A = \frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-1} \qquad B = \frac{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{5}} \qquad C = \frac{-3+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{5+\frac{2}{5}-\frac{2}{3}}$$

Réponse : voir page 18

1. Il se peut, il est même certain que certaines réponses sont erronées ; merci de les signaler à l'adresse robert.thai@prepas.org ou mathilde.cv@free.fr

Exercice 4. Développer et réduire les expressions suivantes :
$A = 5(3a^2-4b^3)-[9(2a^2-b^3)-2(a^2-5b^3)]$
$B = 3a^2(2b-1)-[2a^2(5b-3)-2b(3a^2+1)]$

Réponse : voir page 18

2 Racines carrées

Exercice 5. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$\sqrt{(-5)^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$

$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ $\qquad$ $\sqrt{(3-a)^2}$ (selon les valeurs de a)

Réponse : voir page 18

Exercice 6. Ecrire aussi simplement que possible :

$a = (2\sqrt{5})^2$ $\qquad$ $b = (2+\sqrt{5})^2$

$c = (3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ $\qquad$ $d = (\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

$e = (\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2$ $\qquad$ $f = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$

$g = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ $\qquad$ $h = \dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Réponse : voir page 18

Méthode : technique de la quantité conjuguée.
Pour rendre rationnel un dénominateur, on utilise l'identité

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

Ainsi : $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}.\dfrac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

Exercice 7. Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes :

$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\qquad b = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$c = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ $\qquad d = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

$e = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ $\qquad f = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Réponse : voir page 18

Exercice 8. Vérifier les égalités suivantes :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3} \qquad \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2} \qquad \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

3 Calculs de factorielles

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on pose $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Par convention $0! = 1$

Exercice 9. Simplifier $\dfrac{12!}{8!}$ $\quad \dfrac{12!}{3!10!}$ $\quad \dfrac{1}{9!} - \dfrac{1}{10!}$.

Réponse : voir page 18

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et (a,b) deux réels strictement positifs, simplifier

$$A_n = \frac{(n+3)!}{(n+1)!} \qquad B_n = \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \qquad C_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ où } u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}$$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 18

Exercice 11. Factoriser les expressions suivantes :

$$A_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n^2+1}{n(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$
$$B_n = \frac{1}{nn!} - \frac{1}{n(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!}.$$

Réponse : voir page 18

On définit les coefficients binômiaux pour tout entier naturel non nul n et tout entier k compris entre 0 et n par la formule $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Exercice 12. Montrer qu'avec les notations ci-dessus on a

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

4 Puissances

Pour x un réel (ou complexe) non nul et n un entier naturel non nul, par définition on a : $\boxed{x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \text{ et } x^0 = 1}$

Règles de calcul : pour x, y **deux réels non nuls** et m, n deux entiers relatifs

$$x^m \times x^n = x^{m+n} \text{ et } (xy)^m = x^m \times y^m$$
$$\frac{1}{x^m} = x^{-m} \text{ et } \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$
$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Règle d'écriture : lorsqu'on a un produit, on n'écrit pas $b \times 2 \times 3 \times a$ et encore moins $(b \times 2) \times (a \times 3)$, même au cours d'un calcul : on écrit directement $6ab$ en *respectant impérativement l'ordre alphabétique* des lettres.

Exercice 13. Calculer les expressions suivantes :

$A = (7xy)^3$ $\qquad A_1 = (3x^2y)^2$ $\qquad B = (2a^2b^3)^5$

$C = [(-\dfrac{a}{b})^3]^2 \times [(-b)^2]^3$

$D = xy \times (-\dfrac{2}{3})x^2 \times \dfrac{3}{4}y^2 = -\dfrac{1}{2}x^3y^3$ $\qquad E = (\dfrac{2}{7})a^2 \times (-\dfrac{3}{4})xy^3 \times (-\dfrac{2}{5})a^2x$

$F = (-\dfrac{3}{5})a^2 \cdot (\dfrac{2}{3})b^2x \cdot (-x)^4$ $\qquad G = 4x^3 \cdot (-3y^2) \cdot (-\dfrac{5}{6})a^2x^2y^5$

Réponse : voir page 18

Pour x un réel **strictement positif** et α réel, par définition on pose :

$$\boxed{x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}}$$

Règles de calcul : pour x, y **deux réels strictement positifs** et α, β deux réels

$$x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta} \text{ et } (xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$$
$$\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \text{ et } \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$$
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Convention usuelle : « x^{α^β} » souffre d'un problème de parenthésage et pourrait désigner $(x^\alpha)^\beta$ et $x^{(\alpha^\beta)}$. Or les règles de calcul donnent $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$; donc on convient habituellement que la notation x^{α^β} désigne $x^{(\alpha^\beta)}$.

Exercice 14. Simplifier :

$A = \dfrac{4^{12}}{2^{25}}$; $B = \dfrac{3}{2}\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$; $E = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

$F = (-1)^3\left(-\dfrac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\dfrac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\dfrac{1}{14}\right)$

$G = 77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7\times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-8})^{-3} \times \dfrac{1}{(-11)^{-3}}$

$K = (a^{n^2})^2$; $L = \dfrac{a^{n^2}}{a^n}$; $M = a^{3n}(a^n)^3$; $P = (a^n)^n$

où a est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

Réponse : voir page 18

Exercice 15. (**exercice fondamental**)

Exprimer en fonction de e^x les nombres suivants :
$A = \mathrm{e}^{kx}$ $B = \mathrm{e}^{-x}$ $C = \mathrm{e}^3\mathrm{e}^{3x-1}$ $D = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+1}$ $E = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ $F = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x} + 3$

Réponse : voir page 18

5 Sommes et produits de polynômes

Les "polynômes" seront définis pendant l'année, mais vous avez déjà travaillé avec des expressions polynomiales, par exemple $x^2 - 3x + 1$ ou $x - 2x^3 + 1$.

Un polynôme doit impérativement être ordonné selon les puissances croissantes (ou décroissantes). Par exemple, on n'écrit jamais $x - 2x^3 + 1$, mais $-2x^3 + x + 1$.

Exercice 16. Réduire et ordonner les polynômes suivants :

$P(x) = 7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2$

$Q(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{5}{4}x - 3x^2 + \dfrac{x}{6} - \dfrac{5}{2}x^2 + 5 + 4x^2$

$R(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + xy + y^2 - 2xy + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{3}{2}x^2$

$S(a) = 4a^2 - \dfrac{2}{3}a - \dfrac{2}{5}a^2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}a - 5a + \dfrac{2}{15}a^2 - \dfrac{3}{4}$

$T(x) = 4x^2 - \dfrac{7}{2} + \dfrac{3}{5}x - \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 - 5 + \dfrac{3}{2}x^3 + 7 - 2x$

Réponse : voir page 18

Somme de polynômes

Méthode : on considère les polynômes :
$A = 2 - 5x + 4x^3$ $B = -8x + 4x^2 + 6$ $C = -2x^3 + 3 + x^2 + 2x$
Pour calculer la somme $A - B + C$, on recopie sur 3 lignes les polynômes ordonnés, en laissant de l'espace pour les puissances manquantes :

$$\begin{array}{rcrrrr} A & = & 4x^3 & & -5x & +2 \\ -B & = & & -4x^2 & +8x & -6 \\ C & = & -2x^3 & +x^2 & +2x & +3 \end{array}$$

puis on additionne par colonnes.

On trouve immédiatement $A - B + C = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

Exercice 17. Former les polynômes

$$A+B+C \quad A-B+C \quad A+B-C \quad -A+B+C$$

avec $A = 3x^2 - 4x + 5$ $B = 2x^2 + 4 - 5x$ $C = 3 - x + 4x^2$

Réponse : voir page 18

Exercice 18. Même question avec

$$A = 5a^2 - 3ab + 7b^2 \quad B = 9b^2 - 8ab + 6a^2 \quad C = -7b^2 - 3ab + 4a^2$$

Réponse : voir page 18

Produit de deux polynômes à une variable

Méthode : après avoir ordonné les polynômes, on peut disposer les calculs comme une multiplication d'entiers à l'école primaire, en réservant de l'espace pour les puissances manquantes.
Soient les polynômes $A = 3x^3 - 2 + 5x$ et $B = 2x^2 - 4x + 3$.
Calculer le produit $A.B$

$A =$			$3x^3$		$+5x$	-2
$B =$				$2x^2$	$-4x$	$+3$
$3.A =$			$+9x^3$		$+15x$	-6
$-4x.A =$		$-12x^4$		$-20x^2$	$+8x$	
$2x^2.A =$	$6x^5$		$+10x^3$	$-4x^2$		
$A.B =$	$6x^5$	$-12x^4$	$+19x^3$	$-24x^2$	$+23x$	-6

Exercice 19. Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :
$A = (4x^5 + 7 - 2x^3)(x^3 - 2x)$
$B = (5x^3 - 2x)(3x - 4x^2)$
$C = (7x^4 - 2x^3 + 4x^2)(3x^2 - 5)$
$D = (2x^2 - 4 + 2x)(x^2 + 5 - 2x)$
$E = (2x - 7x^2 + 5x^3)(3x - 5x^2 + 8)$
$F = (\frac{5}{4}x^3 - 2x + \frac{1}{2})(\frac{7}{2}x^3 - 2x + \frac{1}{2})$
$G = (3x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$
$H = (4x^3 - 7x + 2x^2 + 5)^2$
Réponse : voir page 18

6 Identités remarquables

Démontrer (et apprendre) les identités suivantes :
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.$

Factorisation pour a, b réels (ou complexes) et n un entier naturel non nul :

$$\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

Cette formule est à mettre en relation avec la somme de termes d'une suite géométrique rappelée un peu plus loin ci-dessous.

Exercice 20. Démontrer que pour tous réels a, b, c on a les égalités :

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)((b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2) \end{aligned}$$

Exercice 21. Factoriser
$A = x^2 - 2x + 1$ $\quad B = x^2 + x + \frac{1}{4}$
$C = 4x^2 - 4x + 1$ $\quad D = a^2 + 4a + 4$
$E = 4x^3 + 8x^2y + 4xy^2$ $\quad F = (x + y)^3 - x^3 - y^3$
$G = (x - y)^3 - x^3 + y^3$ $\quad H = x^3 + 27y^3$
$K = 8a^3 - 125$
Réponse : voir page 18

Exercice 22. Compléter de façon à obtenir une expression de la forme $(T + U)^2$
$A = x^2 + \cdots + 16$ $\quad B = x^2 - \cdots + 9a^2$
$C = 4x^2 - 4x + \ldots$ $\quad D = 9x^2 + 6x + \ldots$
$E = x^2 + \cdots + y^4$ $\quad F = 4a^2x^2 - \cdots + 1$
Réponse : voir page 18

Exercice 23. Simplifier les expressions suivantes, en admettant qu'elles sont définies :

$$A=\frac{7a^2x^5}{2b^2x^4}\qquad B=\frac{-2a^3b^2x}{3a^3bx^3}\qquad C=\frac{10a^2x^3y^2}{-4a^4x^3y}$$

$$D=\frac{x^2}{x^2-x}\qquad E=\frac{x^2+x^3}{x^3-x}\qquad F=\frac{6x^2-4x}{9ax-6a}$$

$$G=\frac{ax+by}{a^2x^2-b^2y^2}\qquad H=\frac{x^3-9x}{3x^2-9x}\qquad I=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$$

Réponse : voir page 18

Exercice 24. Calculer les expressions suivantes, sans vous préoccuper de leur définition :

$$A=\frac{x+1}{6}+2\frac{2x-1}{21}-\frac{3x+1}{14}\qquad B=\frac{x+2}{5}-\frac{4x+3}{15}-\frac{x+1}{3}$$

$$C=\frac{1}{a(a+1)}-\frac{1}{a(a-1)}+\frac{2a}{a^2-1}\qquad D=\frac{2}{2a+1}-\frac{1}{2a-1}+\frac{2}{4a^2-1}$$

$$E=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+1}+\frac{x^2-3}{x^2-1}\qquad F=\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}$$

$$G=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x^2-4}\qquad H=\frac{x-2}{x^2+2x}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}$$

$$I=\frac{x^3}{x^3-x^2}+\frac{x}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}\qquad J=\frac{1}{x}+\frac{x-2}{x^2-4}-\frac{2}{x^2+2x}$$

Réponse : voir page 18

Exercice 25. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A=(a+b)(a+x)(b+x)-a(b+x)^2-b(a+x)^2$$

$$B=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b)$$

$$C=(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$D=(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2$$

$$E=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2-(a+b+c)^2$$

$$F=a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)$$

Réponse : voir page 19

Exercice 26. Simplifier les expressions suivantes, sans vous préoccuper de leur définition :

$$A=\frac{x}{2}\times\frac{x+1}{6}\times\frac{4x}{x^2-1}\qquad B=\frac{x+3}{5}\frac{x+1}{x^2}\frac{x}{(x+1)(x+3)}$$

$$C=\frac{a-b}{a}\times\frac{a^2-ab}{5}\times\frac{3a}{a^2-b^2}\qquad D=\frac{1}{a^2-ab}\times\frac{4}{a^2}\times\frac{a^2-b^2}{5}$$

$$E=\frac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}}\qquad F=\frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{1-\dfrac{x-1}{x+1}}$$

$$G=\frac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\qquad H=\frac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b^2}{a-b}}{\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{ab}{a+b}}$$

Réponse : voir page 19

Exercice 27. Résoudre $\left(\dfrac{x+5}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{x^2+25}{2}$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 19

Exercice 28. Pour a,b réels et n un entier naturel non nul, factoriser

$A=a^5-b^5$ $\quad$ $B=a^5+b^5$

$C=16a^2-8a+1$ $\quad$ $D=a^4-4a^2b^2+4b^4$

$E=a^3-8b^3$ $\quad$ $F=a^2+2a^4-b^2-2b^4$

$G=a^{2n}-1$ $\quad$ $H=a^{2n+1}+1$

$J=a^3+8+(a+2)(2a-5)$ $\quad$ $K=a^2-4b^2$

$L=4a^2+b^2-4ab$ $\quad$ $M=a^{2n}-4^n$

$P=(a+b)^2-4ab$

Réponse : voir page 19

Somme des termes d'une suite géométrique : pour q réel (ou complexe)

$$\boxed{1+q+q^2+\cdots+q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}}$$

Exercice 29. Calculer en fonction de n

$A_n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{2n}$
$B_n = -1 + 4 - 16 \cdots + (-1)^{n-1}4^n$
$C_n = 1 - a^2 + a^4 - a^6 + \cdots + (-1)^n a^{2n} \quad (\star)$
$D_n = u_0 + \cdots + u_n$ où $u_n = (-5)^{3n+1} \quad (\star\star)$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 19

Exercice 30. Calculer $A_n = 9 + 27 + \cdots + 3^{n+2}$ (on factorisera par 3^2 pour se ramener à la formule encadrée).

Calculer de même $B_n = a^2 + a^4 + \cdots + a^{2n}$ et $C_n = 3^{n+2} + 3^{n+3} + \cdots + 3^{2n+4}$.

Réponse : voir page 19

7 Logarithmes et exponentielles

Il n'est pas question de donner ici les constructions des fonctions exponentielle et logarithme, qui feront l'objet d'un chapitre de cours, mais seulement de rappeler les principales règles de calcul :

- La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie pour tous réels a et b **strictement positifs** :
  $$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0$$
  $$\text{d'où} \quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

Ecrire $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ exige d'avoir $x > 0$ et $y > 0$.

- la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\boxed{\exp(a+b) = \exp a \exp b}$ pour tous réels a et b. On note usuellement $\boxed{\exp a = \mathrm{e}^a}$ où $\boxed{\ln \mathrm{e} = 1}$.

Enfin pour tout réel x **strictement positif** et pour tout entier relatif (et même tout réel) α on a

$$\boxed{\exp(\ln x) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln x^\alpha = \alpha \ln x}$$

Exercice 31. Calculer les nombres suivants

1. en fonction de $\ln 2$:
$$\ln 16 \quad \ln 512 \quad \ln 0.125 \quad \frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8} \quad \ln 72 - 2\ln 3$$
2. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
$$\ln 36 \quad \ln\frac{1}{12} \quad \ln 2.25 \quad \ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0.875$$
3. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:
$$\ln 500 \quad \ln\frac{16}{25} \quad \ln 6.25 \quad \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 19

Exercice 32. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire que $\dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

Indication : voir page 17

Exercice 33. Calculer y sachant que
$$\ln y = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 19

Exercice 34. Simplifier
$$A = \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right) \qquad B = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Réponse : voir page 19

Exercice 35. Simplifier les nombres suivants
$$\mathrm{e}^{3\ln 2} \qquad \ln(\sqrt{e}) \qquad \ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}) \qquad \mathrm{e}^{-2\ln 3} \qquad \ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) \qquad \ln(\sqrt[5]{\mathrm{e}})$$

Réponse : voir page 19

Exercice 36. Montrer que les fonctions suivantes sont impaires :
$$f : x \mapsto \ln\frac{2016+x}{2016-x} \qquad g : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad h : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$
On n'oubliera pas de vérifier que leur ensemble de définition est centré en 0 !

Exercice 37. Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \ln(-x-5) & = & \ln(x-61)-\ln(x+7) \\ (b) & \ln(-x-5) & = & \ln\dfrac{x-61}{x+7} \end{array}$$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 19

Exercice 38. Simplifier

$a=\mathrm{e}^{\ln 3-\ln 2}$ $\quad b=-\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}}$ $\quad c=\mathrm{e}^{-\ln\ln 2}$ $\quad d=\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$

$f=\ln(\sqrt{\mathrm{e}^4})-\ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ $\quad g=\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln\mathrm{e}^2)}\right)$ $\quad h=\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$

Réponse : voir page 19

Exercice 39. Soit $f : x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$.

Questions subsidiaires : déterminer la parité de cette fonction et en calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Réponse : voir page 19

Exercice 40. Simplifier pour x non nul l'expression $f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}|\ln(x^2)|}$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 19

Exercice 41. Résoudre les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{llll} (1) & \mathrm{e}^{3x-5}\geqslant 12 & 1\leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x} & (2) \\ (3) & \mathrm{e}^{1+\ln x}\geqslant 2 & \mathrm{e}^{-6x}\leqslant\sqrt{\mathrm{e}} & (4) \end{array}$$

Réponse : voir page 19

8 Encadrements

Pour essayer de minimiser les erreurs de calcul, il est préférable de ne manipuler que des inégalités $<$ ou $\leqslant$.

On rappelle les règles usuelles de calcul sur les inégalités :

- addition membre à membre de deux inégalités de même sens ;
- multiplication par $\lambda>0$ des deux membres d'une inégalité sans en changer le sens (c'est la croissance de l'application $x\mapsto\lambda x$), et renversement du sens de l'inégalité si $\lambda<0$
- le passage à l'inverse renverse le sens d'une inégalité où les deux membres sont strictement positifs (c'est la décroissance de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$)
- multiplication membre à membre de deux inégalités de même sens entre nombres strictement positifs.

Exercice 42. Encadrer $a+b$, ab et $\dfrac{a}{b}$ sachant que :

1. $3,2<a<3,3$ et $1,6<b<1,7$
2. $-3,3<a<-3,2$ et $1,6<b<1,7$
3. $-3,3<a<-3,2$ et $-1,7<b<-1,6$

Réponse : voir page 19

Exercice 43. On se fixe $x\in\left]\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right[$.

Encadrer alors $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=x^2+x+3$ $\quad h(x)=-x^2+x+1$ par deux méthodes différentes.

Indication : voir page 17

Exercice 44. Vérifier que $\dfrac{1}{1+x}=1-x+\dfrac{x^2}{1+x}$ pour tout réel x différent de -1.

En déduire que pour tout réel $x>-\dfrac{1}{2}$ on a : $\left|\dfrac{1}{1+x}-(1-x)\right|\leqslant 2x^2$

Exercice 45. On fixe deux entiers naturels a et b tels que $a \leqslant b$ et $b \neq 0$. Etablir que :

$$\frac{a}{b+1} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{a+1}{b+1}$$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 20

Exercice 46. On fixe deux entiers naturels a et b supérieurs à 2 ; comparer les nombres rationnels :

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{a+1}{b+1} \qquad \frac{a-1}{b-1}$$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 20

9 Trigonométrie

Avertissement au lecteur : toutes les formules de ce paragraphe sont à savoir sur le bout des doigts, et pas seulement à « savoir (prétendûment) retrouver ».

Là encore, pas question de faire ici un cours complet sur les fonctions trigonométriques $\cos, \sin, \tan$, seulement de brefs rappels [2] :

- la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique
  c'est-à-dire que pour tout réel x, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
  et impaire c'est-à-dire que pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- la fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique et paire c'est-à-dire que pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$;
- la fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$; elle est π-périodique c'est-à-dire ? et impaire.

Première formule : $\boxed{\cos^2 + \sin^2 = 1}$

2. et une invitation très ferme à aller revoir vos cours de lycée sur la question

Exercice 47. Faire l'étude de la fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$:
domaine de définition, parité, périodicité, limites aux bornes de l'ensemble de définition ; dérivabilité, exprimer sa dérivée de deux façons différentes ; tableau de variation et graphe.

Exprimer simplement $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ pour tout réel non nul $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Réponse : voir page 20

Première série de formules pour un réel a quelconque [3] :

$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(-a) = -\sin a$	$\tan(-a) = -\tan a$
$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\tan(\pi + a) = \tan a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\frac{1}{\tan a}$

Résolution d'équations trigonométriques. a est un réel donné.

$\sin x = \sin a \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.
$\cos x = \cos a \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$.
$\tan x = \tan a \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + k\pi$.

Exemple : résoudre l'équation $\sin 3x = \sin x$

$$\begin{aligned} \sin 3x = \sin x &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = x + 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi - x + 2k\pi \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = 2k\pi \text{ ou } 4x = \pi + 2k\pi \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 48. Résoudre les équations suivantes

(1) $\sin x = \sin(\pi - 3x)$ (2) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$

(3) $\cos 2x + \cos \frac{x}{2} = 0$ (4) $\tan x = \tan(\frac{\pi}{2} + x)$

(5) $\cos(\frac{7\pi}{5} - x) = \cos(\frac{2\pi}{5} + 3x)$ (6) $\tan(x - \frac{\pi}{4}) + \tan 3x = 0$

(7) $\cos x = \sin \frac{7x}{5}$ (8) $\cos 4x = \sin 7x$

(9) $\sin(\frac{5\pi}{2} - x) + \cos 2x = 0$

(10) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ (11) $\tan 3x = \tan 5x$

3. Formules à connaître par cœur et, pour les deux premières colonnes, à voir sur le cercle trigonométrique... vous trouverez sur internet

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 20

Deuxième série de formules[4] :

$$\begin{array}{|lcl|lcl|}\hline \cos(a+b) &=& \cos a\cos b-\sin a\sin b & \cos(a-b) &=& \cos a\cos b+\sin a\sin b\\ \sin(a+b) &=& \sin a\cos b+\cos a\sin b & \sin(a-b) &=& \sin a\cos b-\cos a\sin b\\ \tan(a+b) &=& \dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b} & \tan(a-b) &=& \dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}\\ \hline\end{array}$$

Exercice 49. Démontrer les formules sur la tangente d'une somme.

Formules de duplication[5]

$$\begin{array}{|lcl|}\hline \cos(2a) &=& \cos^2 a-\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1-2\sin^2 a\\ \sin(2a) &=& 2\cos a\sin a\\ \hline\end{array}$$

Valeurs remarquables[6]

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

X : non défini, attention !

Exercice 50. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{c}\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \pi \leqslant x \leqslant 2\pi\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{c}\cos x = -\dfrac{1}{2}\\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\end{array}\right.$$

Réponse : voir page 20

Exercice 51. En remarquant que $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$ calculer $\cos\frac{5\pi}{12}, \sin\frac{5\pi}{12}, \tan\frac{5\pi}{12}$.

Réponse : voir page 20

4. Formules à apprendre également...
5. Formules à apprendre également...
6. Là encore, à apprendre et à placer sur un cercle trigonométrique.

Exercice 52. Simplifier $\frac{\sin 2a}{\sin a}-\frac{\cos 2a}{\cos a}$.

Réponse : voir page 20

Exercice 53. Calculer $\sin(x+\frac{\pi}{4})$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$; en déduire la résolution des équations $\sin x+\cos x = 1$ puis $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

Réponse : voir page 20

Exercice 54. Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ en montrant qu'il est racine de l'équation $4x^2 = 2+\sqrt{2}$.

Réponse : voir page 20

Exercice 55. Résoudre le système d'inconnue réelle $x \in [0, 2\pi]$ suivant : $\left\{\begin{array}{rcl}2\cos x & \geqslant & 1\\ \tan x & \geqslant & 0\end{array}\right.$

Réponse : voir page 20

Exercice 56. Résoudre $16\sin^4(x+\frac{\pi}{10}) \geqslant 1$ d'inconnue réelle $x\in[-\pi,\pi]$.

Réponse : voir page 20

10 Equations polynômiales du premier degré

Rappel :

Si a, b, c et d sont des nombres réels (ou complexes) et b et d ne sont pas nuls, alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$

Exercice 57. Résoudre les équations suivantes

$$3x = 4\ (1) \qquad \frac{4}{x-3}=2\ (2) \qquad \frac{2x+3}{x-5}=\frac{4}{3}\ (3) \qquad \frac{3}{x-\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}-x}\ (4)$$

Réponse : voir page 20

Exercice 58. Résoudre les équations suivantes :

$(a)5(2x-3)-4(5x-7) = 19-2(x+11)$; $(b)4(x+3)-7x+17 = 8(5x-3)+166$

$(c)17-14(x+1) = 13-4(x+1)-5(x-3)$; $(d)17x+15(x-1) = -1-14(3x+1)$

Réponse : voir page 20

Exercice 59. Résoudre les équations suivantes :

$(a)(x-1)(x-2)(x-3)=0$ $\quad$ $(b)x^2-3x=0$

$(c)-\dfrac{3}{5}x^2+x=0$ $\quad$ $(d)x^2=81$

$(e)9x^2=64$ $\quad$ $(f)x(5x+1)(4x-3)(3x-4)=0$

$(g)x(x+1)=x+1$ $\quad$ $(h)(x+5)(4x-1)+x^2-25=0$

$(i)4x^2-49=0$ $\quad$ $(j)(3x+1)(x-3)^2=(3x+1)(2x-5)^2$

$(k)3x^3-12x=0$ $\quad$ $(l)\dfrac{5x-1}{3x+2}=\dfrac{5x-7}{3x-1}$

Réponse : voir page 20

11 Trinômes réels

Soit (a,b,c) trois réels avec $a\neq 0$.
L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines réelles si et seulement si son discriminant $\Delta=b^2-4ac$ est positif ou nul.
Dans ce cas ces racines valent $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, la somme des racines vaut alors $S=-\dfrac{b}{a}$ et le produit vaut $P=\dfrac{c}{a}$.
Si le discriminant est nul, il y a alors une racine double qui vaut $-\dfrac{b}{2a}$.
Enfin, la fonction $x\mapsto ax^2+bx+c$ est du signe de a sauf entre les racines s'il y en a.

Exercice 60. Démontrer les résultats ci-dessus, et faire les représentations graphiques correspondant aux différents cas.

Remarque : (essayer de) ne pas passer à côté d'éventuelles racines « évidentes » !

En effet, on a l'égalité : $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$.

Exemple d'utilisation : si l'équation $x^2-5x+6=0$ admet deux solutions α et β, alors leur somme vaut 5 et leur produit 6.

Or $6=6\times 1=3\times 2$; et $6+1=7$ et $3+2=5$.

On obtient ainsi facilement et sans calcul l'égalité $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$: les solutions sont donc 2 et 3.

Exercice 61. Résoudre les équations suivantes :

$a)8x^2-6x+1=0$ $\quad$ $b)x^2-10x+16=0$
$c)x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{8})x+4=0$ $\quad$ $d)x^2-(a+2)x+2a=0$
$e)x^2+(1+\pi)x+\pi=0$ $\quad$ $f)-x^2+8x+6=0$
$g)8x^2+6x+1=0$ $\quad$ $h)-x^2+6x=0$
$i)3x^2=8$ $\quad$ $j)169x^2+13x-1=0$
$k)x^2+4ax+3a^2=0$ $\quad$ $l)-12x^2+125=0$
$m)-6x^2+7x-1=0$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 20

Exercice 62. Après avoir précisé l'ensemble de définition, simplifier :

$$F_1(x)=\frac{x^2+5x+4}{2x^2-x-3}\qquad F_2(x)=\frac{2x^2+x-6}{x^2+2x}$$

Réponse : voir page 20

Exercice 63. Calculer la seconde racine des équations suivantes

$3x^2-14x+8=0$ sachant que $x=4$ convient

$7x^2+23x+6=0$ sachant que $x=-3$ convient

$mx^2+(2m+1)x+2=0$ sachant que $x=-2$ convient

$(m+3)x^2-(m^2+5m)x+2m^2=0$ sachant que $x=m$ convient

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 20

Exercice 64. Résoudre les équations suivantes :

(1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{7}{12}$ $\quad$ (2) $(3x-1)(2x+1)=9x^2-1$

(3) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{24}$ $\quad$ (4) $\dfrac{x^2-x-1}{x+2}=2x+3$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 21

Exercice 65. Résoudre **sans tableau de signes ni le moindre calcul** les inéquations suivantes

$$(1)\quad (3x-1)(x-5)<0 \qquad (2)\quad (5-2x)(3+x)>0 \qquad (3)\quad \frac{2x+1}{x-5}\leqslant 0$$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 21

Exercice 66. Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivante

a) $x^2+1>2x-3$ b)$2x-1\leqslant x^2+4$

c) $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{3}{x-2}$ d)$\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x-2}\geqslant 1$

e) $(x^2-5x+4)(x^2-4x+3)>0$ f) $(x^2-5x+4)(x^2-9x+14)\leqslant 0$

g) $5\leqslant x^2-14x+50\leqslant 26$ h)$0\leqslant \dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2}<1$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 21

Exercice 67. Résoudre l'équation $x^4-4x^2-5=0$.

Réponse : voir page 21

Exercice 68. On considère l'équation $9x^2-3x-4=0$.

1.Résoudre l'équation, préciser le signe des racines et montrer que la somme de leurs carrés vaut 1.
Il existe donc un unique angle θ compris entre 0 et π, dont le sinus et le cosinus sont les racines de ce trinôme.

Calculer $\sin(\theta),\cos(\theta),\sin(2\theta),\cos(2\theta)$ et $\tan(2\theta)$.

Réponse : voir page 21

2.(facultatif) On reprend les questions précédentes **sans résoudre l'équation**. Montrer que cette équation admet deux racines distinctes de signes opposés, et que la somme de leurs carrés vaut 1.
Il existe donc un unique angle θ compris entre 0 et π, dont le sinus et le cosinus sont les racines de ce trinôme.

Calculer alors $\sin(2\theta)$ et $|\cos 2\theta|$.

Indication : voir page 17

Exercice 69. Résoudre successivement les équations suivantes

$$(\ln x)^2-\ln x-42=0 \qquad (\ln x)^2-\frac{42}{(\ln x)^2}=1$$

Réponse : voir page 21

Exercice 70. Montrer que les inéquations $\dfrac{x+5}{x-5}<0$ et $x^2-25<0$ ont le même ensemble de solutions. Les inéquations $\dfrac{x+5}{x-5}\leqslant 0$ et $x^2-25\leqslant 0$ ont-elles le même ensemble de solutions ?

Réponse : voir page 21

Exercice 71. Résoudre les inéquations suivantes :

$2x^2-5x-7<0\quad (1)$ $x^2-2x-15>0\quad (2)$

$-4x^2+3x+1<0\quad (3)$ $-x^2-8x+9\geqslant 0\quad (4)$

$\dfrac{(x-3)(x-1)}{2}+5x\leqslant \dfrac{x^2}{3}\quad (5)$ $\dfrac{(x-1)^2}{2}<3(x-1)\quad (6)$

$4x-3\geqslant x^2-2x+6\quad (7)$ $(x-3)^2>(x+5)^2\quad (8)$

$x^2+3x>0\quad (9)$ $(2x-5)(x+1)>0\quad (10)$

$(1-x)(x-7)\geqslant 0\quad (11)$ $(x-6)^2<(x-10)(x-2)\quad (12)$

$\dfrac{2-3x}{x+2}\leqslant 0\quad (13)$ $\dfrac{2x-1}{x-m}\geqslant 0\quad (14)$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 21

12 Valeurs absolues

On appelle **valeur absolue** de $x\in\mathbb{R}$ le réel, noté $|x|$, défini par

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0\\ -x & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$$

Si a est un réel positif on dispose de l'équivalence

$$|x|=a \Longleftrightarrow x^2=a^2$$

Inéquations : pour un réel **positif** a on a $\boxed{\begin{array}{lcl} |x|\leqslant a & \Longleftrightarrow & -a\leqslant x\leqslant a\\ |x|\geqslant a & \Longleftrightarrow & x\leqslant -a \quad\text{ou}\quad a\leqslant x\end{array}}$

Enfin pour deux réels x et y quelconques on a $\boxed{|x| \leqslant |y| \iff x^2 \leqslant y^2}$

NB : en général on n'a pas $|x+y| = |x| + |y|$; on dispose seulement de l'inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

Exercice 72. Représenter graphiquement les solutions des inéquations du premier encadré ci-dessus de deux façons :

- sur un axe réel
- en construisant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$.

Exercice 73. Résoudre les inéquations suivantes :

(1)	$\|x-3\| \leqslant 4$	(2)	$\|2x+1\| \geqslant 5$	(3)	$\|x+2\| > -5$
(4)	$\|x-1\| \leqslant \|2x+3\|$	(5)	$\|-2x+3\| \leqslant 7$		

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 21

13 Nombres complexes

Là encore, pas question de faire un cours complet sur les nombres complexes.

Formulaire :

Soient z et z' deux nombres complexes.
$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
$\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
$|z| = \sqrt{z.\overline{z}}$ ou encore $|z|^2 = z.\overline{z}$
si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ et $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z.\overline{z'}}{|z'^2|}$
pour tout entier n, $|z^n| = |z|^n$, et extension aux entiers négatifs si $z \neq 0$

Exercice 74. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$a = (3+4i)(4-3i)$; $b = (3-i)^2$; $c = (2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$;

$d = \dfrac{2}{1+i}$; $e = \dfrac{1}{3-i\sqrt{2}}$; $f = \dfrac{1}{i\sqrt{2}-1}$;

$g = \dfrac{2-5i}{3+2i}$; $h = \dfrac{6+3i}{1-2i}$; $k = \dfrac{3i}{3+4i}$

$l = \dfrac{2}{1-2i} + \dfrac{3}{2+i}$; $m = 2i - \dfrac{3}{i-3}$

Réponse : voir page 21

Exercice 75. Ecrire en fonction du conjugué $\overline{z}$ de z le conjugué du nombre complexe Z :

$Z = -2i + 3z$; $Z = 3 + i - 2iz$; $Z = (2-iz)(2z-4+3i)$; $Z = \dfrac{2i+1-iz}{5i+2z}$

Réponse : voir page 21

Ici α et α' désignent des nombres réels et n un entier naturel.

D'abord la définition : $\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha}$

Puis un formulaire :

$$\boxed{e^{i\alpha} \times e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')} \qquad \frac{1}{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} = \overline{e^{i\alpha}} \qquad (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} \qquad \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} = e^{i(\alpha-\alpha')}}$$

Exercice 76. Placer le nombre $e^{i\alpha}$ dans le plan complexe ainsi que son conjugué. Démontrer les deux premières formules de l'encadré en utilisant la définition de $e^{i\alpha}$ et les formules de trigonométrie donnant le cosinus d'une somme.

Réponse : voir page 21

Exercice 77. Mettre sous forme algébrique, placer sur un cercle trigonométrique et écrire sous forme trigonométrique $e^{i\alpha}$ les nombres suivants :

$a = e^{0i\pi}$ $b = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $c = e^{2i\pi}$ $d = e^{i\pi}$ $f = e^{-2i\pi}$ $g = -e^{i\frac{\pi}{2}}$

$h = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $j = -e^{i\frac{\pi}{3}}$ $k = ie^{i\frac{\pi}{4}}$ $l = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}$ $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ne pas hésiter à poursuivre l'exercice...

Réponse : voir page 21

Exercice 78. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Calculer ω^5. Montrer que $e^{-i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{4\pi}{5}}$.
Calculer $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8, \omega^9, \ldots$ et remarquer que ω n'a que 5 puissances distinctes. Que vaut ω^{2016} ?
Calculer de même $\omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-3}, \omega^{-4}, \omega^{-5}, \omega^{-6}, \ldots$.

Réponse : voir page 21

Exercice 79. Même exercice avec $\omega' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$.

Exercice 80. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, montrer que $j^3 = 1$ puis que $1 + j + j^2 = 0$.

Résoudre l'équation $z^2 - z + 1 = 0$: on notera z_1 et z_2 les solutions, z_1 désignant celle dont la partie imaginaire est positive.
Montrer que $z_1 - 1 = j$ et $z_2 - 1 = j^2$, en déduire que pour tout entier naturel n, z_1 et z_2 sont solutions de $(z-1)^{n+2} + z^{2n+1} = 0$.

Montrer que $(1 + j)^3 + (1 + j^2)^3 = -2$.

Réponse : voir page 21

14 Calculs de limites

Rappel.

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction bornée et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$

Résultats : ces résultats à savoir par cœur permettent de lever des indéterminations

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0$$

Exercice 81. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$a : x \mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \qquad b : x \mapsto \frac{x+7}{4x+3} \qquad c : x \mapsto \frac{x^2+5}{x^3-1} \qquad d : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

$$e : x \mapsto \cos(x^2)\mathrm{e}^{-x} \qquad f : x \mapsto \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \qquad g : x \mapsto (2 + \sin x)x$$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 21

Une technique essentielle pour calculer une limite est de **mettre en facteur le terme prépondérant**.

Exemple. Déterminer la limite en $+\infty$ de $F(x) = \dfrac{x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 30}{x^3 + 5x - 4}$.

Au numérateur $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$ etc. Mais de tous les termes du numérateur le terme prépondérant (c'est-à-dire celui qui croît le plus vite vers $+\infty$) est le terme en x^5. En faisant une remarque similaire pour le dénominateur, on est donc amené à écrire :
$F(x) = \dfrac{x^5(1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{30}{x^5})}{x^3(1 + \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3})}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

Exercice 82. Utiliser cette technique pour déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes

- $g_1(x) = \dfrac{x+3}{2-x}$
- $g_2(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$
- $g_3(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{-x^2+x-1}$
- $g_4(x) = \dfrac{x+\ln(x)}{2x-\ln(x)}$
- $g_5(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^x + 1}$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 21

Exercice 83. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \dfrac{x^2 + x^3 + 3\ln x + \mathrm{e}^{-x}}{x^4 + \cos x - 1}$
- $f_2(x) = \dfrac{50x + x\ln x}{x\ln x + 3}$
- $f_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{x} + \mathrm{e}^x + \cos x}{x^{20} + 2x^{2013}}$
- $f_4(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$
- $f_5(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x^6 + 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{x/2}}$
- $f_6(x) = \mathrm{e}^{-3\sqrt{x}+x-\ln(x^2+1)+\cos x}$
- $f_7(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
- $f_8(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} + 1) - 2x$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 21

15 Dérivées

Pour u et v deux fonctions dérivables :

Fonction	Dérivée	Observations
$u+v$	$u'+v'$	
λu	$\lambda u'$	λ est un réel
uv	$uv'+u'v$	
u^n avec $n\in\mathbb{Z}$	$nu^{n-1}u'$	u ne s'annule pas si $n\in\mathbb{Z}_-$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas !
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas !
$x\mapsto \mathrm{e}^x$	$x\mapsto \mathrm{e}^x$	
$\ln$	$x\mapsto \dfrac{1}{x}$	
$f\circ g=f(g)$	$f'\circ g\times g'$	bien justifier la dérivabilité de la composée...
$\ln\lvert f\rvert$	$\dfrac{f'}{f}$	f ne s'annule pas
u^α avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$	$\alpha u^{\alpha-1}u'$	$u>0$
$\sqrt{\cdot}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\cdot}}$	$\sqrt{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
$\sin$	$\cos$	
$\cos$	$-\sin$	
$\tan$	$1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$	

Exemple : dériver la fonction $F : x\mapsto\sqrt{x-1}$.

- la fonction $g : x\mapsto x-1$ est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x>1$ on a $x-1>0$.
- la fonction $f : y\mapsto\sqrt{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $F=f\circ g$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme composée et pour $x\in]1,+\infty[$ on a

$$F'(x)=f'(g(x))\times g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Exercice 84. Justifier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f : x\mapsto\dfrac{1}{x}$ $\quad f : x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ $\quad f : x\mapsto\dfrac{1}{x^3}$ $\quad f : x\mapsto\dfrac{1}{x^4}$ $\quad\ldots$

$f : x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ $\quad f : x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad f : x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^3}$ $\quad f : x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^4}$ $\quad\ldots$ etc. en

$f : x\mapsto\dfrac{1}{2x+1}$ $\quad f : x\mapsto\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad f : x\mapsto\dfrac{1}{(2x+1)^3}$ $\quad f : x\mapsto\dfrac{1}{(2x+1)^4}$ $\quad\ldots$

utilisant la formule donnant la dérivée de u^α **et pas celle de la dérivée de $\dfrac{1}{u}$.**

Réponse : voir page 21

Exercice 85. Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée des les fonctions suivantes ; mettre le résultat sous une forme propice à une éventuelle étude de signe

$f_1 : x\mapsto(x-1)^3$	$f_2 : x\mapsto(x^2-1)^3$	$f_3 : x\mapsto 3x^2-6x+1$
$f_4 : x\mapsto(x-1)(x-2)$	$f_5 : x\mapsto\dfrac{x+1}{x+3}$	$f_6 : x\mapsto\dfrac{3-x}{2+x}$
$f_7 : x\mapsto\dfrac{3x+1}{1-x}$	$f_8 : x\mapsto 3x^2-\dfrac{1}{x}$	$f_9 : x\mapsto(x-2)(3-x)(x-4)$
$g_1 : x\mapsto\dfrac{3x^2-2x+1}{-x+2}$	$g_2 : x\mapsto\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-x+2}$	$g_3 : x\mapsto\sqrt{2x-3}$
$g_4 : x\mapsto\sqrt{x^2-2x+5}$	$g_5 : x\mapsto\sqrt[5]{x^2+1}$	$g_6 : x\mapsto\dfrac{1}{-x+2}$
$g_7 : x\mapsto\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$	$g_8 : x\mapsto\sin(\dfrac{\pi}{6}-2x)$	$g_9 : x\mapsto\sin 2x\cos x$
$h_1 : x\mapsto 6\cos^2 x-6\cos x-9$	$h_2 : x\mapsto\dfrac{\cos x}{1+\cos^2 x}$	$h_3 : x\mapsto 2\sin x\cos+\sin x+\cos x$
$h_4 : x\mapsto\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$	$h_5 : x\mapsto\ln(5x-1)$	$h_6 : x\mapsto\ln(x^2+1)$
$h_7 : x\mapsto\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$	$h_8 : x\mapsto\ln\ln x$	$h_9 : x\mapsto\ln\lvert 7-2x\rvert$
$u_1 : x\mapsto x\ln x-x$	$u_2 : x\mapsto\mathrm{e}^{3x}$	$u_3 : x\mapsto\mathrm{e}^{x^2-x+1}$
$u_4 : x\mapsto\mathrm{e}^{\sin x}$	$u_5 : x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$	$u_6 : x\mapsto\mathrm{e}^{x\ln x}$
$u_7 : x\mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$u_8 : x\mapsto\ln(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)$	$u_9 : x\mapsto\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$
$v_1 : x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$	$v_2 : x\mapsto\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	
$v_3 : x\mapsto\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$	$v_4 : x\mapsto\tan 2x$	

Réponse : voir page 22

16 Primitives

Pour u et v deux fonctions continues donc admettant des primitives U et V on a :

Fonction	Primitives	Observations
$u+v$	$U+V+\text{cte}$	
λu	$\lambda U+\text{cte}$	λ est un réel
$u^n u'$ avec $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+\text{cte}$	u ne s'annule pas si $n\in\mathbb{Z}_-$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+\text{cte}$	cas précédent pour $n=-1$ u ne s'annule pas
$x\mapsto \mathrm{e}^x$	$x\mapsto \mathrm{e}^x+\text{cte}$	
$x\mapsto \dfrac{1}{x}$	$\ln+\text{cte}$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$f'\circ g\times g'$	$f\circ g+\text{cte}$	
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert+\text{cte}$	f ne s'annule pas
$u^\alpha u'$ avec $\alpha\neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+\text{cte}$	$u>0$
$\sin$	$-\cos+\text{cte}$	
$\cos$	$\sin+\text{cte}$	
$1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$	$\tan+\text{cte}$	

où

cte désigne une constante arbitraire réelle.

Exercice 86. Déterminer l'ensemble des primitives de $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 22

Remarque : tous les calculs suivants relèvent d'une stricte application du formulaire ci-dessus .

Exercice 87. Calculer les primitives des fonctions suivantes, puis dériver le résultat obtenu pour contrôler la réponse.

$f : x\mapsto x^{16}-35x^{13}+14x^{11}-3x^8+20x^4+56x^3+51x^2+18x+1$

$f_1 : x\mapsto \dfrac{1}{x}$ $\quad f_2 : x\mapsto \dfrac{1}{x^2}$ $\quad f_3 : x\mapsto \dfrac{1}{x^3}$ $\quad f_4 : x\mapsto \dfrac{1}{x^4}$

$g_1 : x\mapsto \dfrac{1}{1-x}$ $\quad g_2 : x\mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad g_3 : x\mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$ $\quad g_4 : x\mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4}$

$h_1 : x\mapsto \dfrac{1}{2x+1}$ $\quad h_2 : x\mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ $\quad h_3 : x\mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$ $\quad h_4 : x\mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4}$

Réponse : voir page 22

Exercice 88. Calculer une primitive des fonctions suivantes puis dériver le résultat obtenu ... :

$a)x\mapsto 4x^2-5x+\dfrac{1}{x^2}$ $\quad b)x\mapsto x(2x^2+1)^4$ $\quad c)x\mapsto (x-1)^3$

$e)x\mapsto (x^2-1)^3$ $\quad f)x\mapsto \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad g)x\mapsto \sqrt{x}+1$

$h)x\mapsto \sin 2x$ $\quad i)x\mapsto \cos 3x$ $\quad j)x\mapsto 1-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$k)x\mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x}$ $\quad l)x\mapsto 2x(x^2-1)^5$ $\quad m)x\mapsto \dfrac{x}{(x^2+2)^2}$

$n)x\mapsto \dfrac{1}{x-3}$ $\quad o)x\mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$ $\quad p)x\mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$

$q)x\mapsto \mathrm{e}^{2x}$ $\quad r)x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{5\mathrm{e}^x+1}$ $\quad s)x\mapsto \mathrm{e}^{2x}\sqrt[3]{1+\mathrm{e}^{2x}}$

$t)x\mapsto \tan x$ $\quad u)x\mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$ $\quad v)x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$w)x\mapsto \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad y)x\mapsto \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$ $\quad z)x\mapsto -\sqrt{\mathrm{e}^x}$

$\alpha)x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ $\quad \beta)x\mapsto \sin x\mathrm{e}^{\cos x}$ $\quad \gamma)x\mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$

$\delta)x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+2\mathrm{e}^x)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad \varepsilon)x\mapsto \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

Indication : voir page 17

Réponse : voir page 22

Exercice 89. Pour la physique...

1) Dériver les fonctions suivantes :

$f_1 : t\mapsto \sin t\ \mathrm{e}^t$ $\quad f_2 : x\mapsto \cos t\ \mathrm{e}^t$ $\quad f_3 : t\mapsto \cos\omega t\ \mathrm{e}^t$ $\quad f_4 : t\mapsto \sin\omega t\ \mathrm{e}^t$

$f_5 : t\mapsto \sin t\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad f_6 : t\mapsto \cos t\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad f_7 : t\mapsto \cos\omega t\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad f_8 : t\mapsto \sin\omega t\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

2) Calculer les intégrales suivantes

$$I_1=\int_{10}^{20}\frac{dv}{v}\qquad I_2=\int_0^1 \mathrm{e}^{-2t}dt\qquad I_3=\int_{10^{-5}}^{10^{-2}}\frac{dp}{2p}\qquad I_4=\int_{275}^{315}\frac{2dT}{T}\qquad I_5=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}A\cos(\omega t+\varphi)dt$$

Réponse : voir page 22

17 Pour aller plus loin

Une fois terminé tout le travail ci-dessus, si vous *souhaitez* aller plus loin dans l'approche des Mathématiques de Sup, vous pouvez, *sur la base du volontariat*, vous plonger dans la lecture du document proposé par nos éminents collègues du lycée Louis le Grand.

Précisons s'il en est encore besoin que sa lecture partielle ou totale est strictement facultative !

Indication de l'**exercice 10** : pour C_n : rappels de cours sur les puissances dans le paragraphe 4.

Indication de l'**exercice 27** : développer puis factoriser...

Indication de l'**exercice 29** : identifier soigneusement la raison avant d'appliquer une formule :

- calculer $-B_n$
- pour C_n, la raison se voit
- pour D_n, commencer par factoriser par 5 avant de chercher la raison.

Indication de l'**exercice 31** : $0.125 = 2^{\cdots}$

Indication de l'**exercice 32** : ne pas oublier la « quantité conjuguée », et tout exprimer en fonction de $\ln(1+\sqrt{2})$.

Indication de l'**exercice 33** : se reporter à l'exercice ci-dessus pour simplifier la somme.

Indication de l'**exercice 37** : attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Indication de l'**exercice 40** : il y a quatre cas à envisager, suivant le signe de x et celui de $\ln|x|$

Indication de l'**exercice 43** : On utilisera d'abord les règles de calcul usuelles sur les inégalités ; puis onpourra étudier rapidement les fonctions f, g, h pour conclure.

Indication de l'**exercice 45** : Inutile de calculer les différences...

Indication de l'**exercice 46** : On supposera $a < b$, puis $a > b$, puis $a = b$

Indication de l'**exercice 48** :
Equation 3 : $-\cos\alpha = \cos(\alpha + \dots)$
Equation 6 : $-\tan\alpha = \tan(\dots\alpha)$
Equations 7 & 8 : $\sin\alpha = \cos(\dots - \alpha)$

Indication de l'**exercice 61** : Pour les équations $b)c)d)e)h)k)$ chercher d'abord des racines évidentes en utilisant la somme et le produit...

Indication de l'**exercice 63** : Inutile de calculer le discriminant, utiliser plutôt les relations entre coefficients et racines. D'autre part, faire attention aux valeurs particulières de m.

Indication de l'**exercice 64** : Pas besoin de discriminant pour les équations $(2), (3), (4)$

Indication de l'**exercice 65** : Ne pas hésiter à tracer l'allure du graphe des deux premières fonctions ...

Indication de l'**exercice 66** :

- pour c) etc. : réduire au même dénominateur ;
- pour g) : on a en fait à traiter un système de deux inéquations

Indication de l'**exercice 68** : Si x_1 et x_2 sont les racines de l'équation, alors $9x_1^2 = 3x_1 + 4$, d'où $9(x_1^2 + x_2^2) = 3(x_1 + x_2) + 8$ et on conclut en utilisant que la somme des racines vaut $\frac{1}{3}$.

Indication de l'**exercice 71** : pour (6) et (8), surtout ne pas développer ! Pour (7) et (9), pas de Δ. Pour (10),(11), on dispose déjà des racines. Ne pas oublier de discuter en fonction de m pour (14).

Indication de l'**exercice 73** : Pour (4) : élever au carré ! et revoir cours et exercices sur les trinômes paragraphe suivant...

Indication de l'**exercice 81** :

- pour a, comparer x et $\sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$
- pour b, c factoriser numérateur et dénominateur
- pour d, e utiliser le résultat encadré
- pour f penser à la limite d'une composée...
- pour g minorer...

Indication de l'**exercice 82** : Factoriser par

- x et x
- x^2 et x^2
- e^x et e^x

Indication de l'**exercice 83** : Factoriser par

- x^3 et x^4 pour f_1
- $x \ln x$ pour f_2
- e^x et x^{2013} pour f_3
- écrire $\ln(1+x) = \ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x})$
- factoriser par e^x pour f_5
- déterminer la limite de « ce qui est dans l'exponentielle »puis conclure en utilisant la limite d'une composée
- quantité conjuguée...
- factoriser e^{2x} dans le logarithme

Indication de l'**exercice 86** : Ne pas chercher midi à quatorze heures...

Indication de l'**exercice 88** : b)c)l)m)o)s)δ) : déterminer une constante λ telle que la fonction à intégrer soit de la forme $\lambda u' u^{\cdots}$
d) : développer
g) : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
k)déterminer une constante λ telle que la fonction à intégrer soit de la forme $\lambda \frac{u'}{u}$
u)v) : de la forme $u' e^u$

Réponse de l'**exercice 1** :
$A = \dfrac{32}{15}$
Réponse de l'**exercice 2** : $A = a + c; B = -2a + 3b + 5c; C = 6; D = a - 9$
Réponse de l'**exercice 3** : $A = \dfrac{2}{3}; B = \dfrac{35}{6}; C = -\dfrac{155}{284}$
Réponse de l'**exercice 4** : $A = -21b^3 - a^2; B == 2a^2b + 3a^2 + 2b$
Réponse de l'**exercice 5** : $5; \sqrt{3} - 1; 2 - \sqrt{3}; |3 - a|$
Réponse de l'**exercice 6** : $a = 20; b = 9 + 4\sqrt{5}; c = 12\sqrt{7}; d = 12; e = 9 - \dfrac{10\sqrt{2}}{3}; f = 50 - 25\sqrt{3}; g = 10; h = 2\sqrt{2}$
Réponse de l'**exercice 7** :

$$a = -(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \qquad b = -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

$$c = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) \qquad d = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$e = \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2 \qquad f = 1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}$$

Réponse de l'**exercice 9** :
$12 \times 11 \times 10 \times 9$; 22 ; $\dfrac{1}{8!10}$
Réponse de l'**exercice 10** :
$A = (n+2)(n+3) \qquad B = \dfrac{1}{(n+1)!} \qquad C_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{a}{b^2}$
Réponse de l'**exercice 11** :

$$A_n = \frac{n-1}{n(n+1)!} \qquad B_n = \frac{n^2 + 4n + 2}{(n+3)!}$$

Réponse de l'**exercice 13** : $A = 343x^3y^3$; $A_1 = 9x^4y^2$ $B = 32a^{10}b^{15}$; $C = a^6$; $D = -\dfrac{1}{2}x^3y^3$; $E = \dfrac{3}{35}a^4x^2y^3$; $F = -\dfrac{2}{5}a^2b^2x^5$; $G = 10a^2x^5y^7$
Réponse de l'**exercice 14** :
$A = \dfrac{1}{2} \quad B = \dfrac{2^{n-1}}{3^n} \quad E = \dfrac{3}{2^3} \quad F = \dfrac{7}{2^8} \quad G = -7^{15} \times 11^8$
$K = a^{2n^2} \quad L = a^{n^2-n} \quad M = a^{6n} \quad P = a^{n^2}$
Réponse de l'**exercice 15** :
$A = (\mathrm{e}^x)^k \quad B = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \quad C = \mathrm{e}^2 \times (\mathrm{e}^x)^3 \quad D = (1 - \mathrm{e})\mathrm{e}^x$
$E = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$; $F = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^2 + 3\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x + 2)}{\mathrm{e}^x}$
Réponse de l'**exercice 16** : $P(x) = 5x^3 + 7x - 1$
$Q(x) = 17/12x + 5$
$R(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - xy + y^2$
$S(a) = \dfrac{56}{15}a^2 - \dfrac{16}{3}a - \dfrac{1}{4}$
$T(x) = \dfrac{17}{6}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{7}{5}x - \dfrac{3}{2}$

Réponse de l'**exercice 17** :
$A + B + C = 9x^2 - 10x + 12 \qquad A - B + C = 5x^2 + 4$
$A + B - C = x^2 - 8x + 6 \qquad -A + B + C = 3x^2 - 2x + 2$
Réponse de l'**exercice 18** :
$A + B + C+ = 15a^2 - 14ab + 9b^2 \qquad A - B + C = 3a^2 + 2ab - 9b^2$
$A + B - C = 7a^2 - 8ab + 23b^2 \qquad -A + B + C = 5a^2 - 8ab - 5b^2$
Réponse de l'**exercice 19** :
$A = 4x^8 - 10x^6 + 4x^4 + 7x^3 - 14x \qquad B - 20x^5 + 15x^4 + 8x^3 - 6x^2$
$C = 21x^6 - 6x^5 - 23x^4 + 10x^3 - 20x^2 \qquad D = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 18x - 20$
$E = -25x^5 + 50x^4 + 9x^3 - 50x^2 + 16x \qquad F = 35/8x^6 - 19/2x^4 + 19/8x^3 + 4x^2 - 2x + 1/4$
$G = 3x^4 - 4x^2 + 1 \qquad H = 16x^6 + 16x^5 - 52x^4 + 12x^3 + 69x^2 - 70x + 25$
Réponse de l'**exercice 21** :
$A = (x-1)^2 \qquad B = (x + \dfrac{1}{2})^2 \qquad C = (2x-1)^2 \qquad D = (a+2)^2$
$E = 4x(x+y)^2 \qquad F = 3xy(x+y) \qquad G = 3xy(-x+y)$
$H = (x+3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) \qquad K = (2a-5)(4a^2 + 10a + 25)$
Réponse de l'**exercice 22** :
$A = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2 \qquad B = x^2 - 6ax + 9a^2 = (x - 3a)^2$
$C = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \qquad D = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$
$E = x^2 + 2xy^2 + y^4 = (x + y^2)^2 \qquad F = 4a^2x^2 - 4ax + 1 = (2ax - 1)^2$
Réponse de l'**exercice 23** :
$A = \dfrac{7}{2}\dfrac{a^2x}{b^2} \qquad B = -\dfrac{2}{3}\dfrac{b}{x^2} \qquad C = -\dfrac{5}{2}\dfrac{y}{a^2}$

$D = \dfrac{x}{x-1} \qquad E = \dfrac{x}{x-1}$
$F = \dfrac{2x}{3a}$

$G = \dfrac{1}{ax - by} \qquad H = \dfrac{1}{3}(x+3) \quad I = \dfrac{x+1}{x-1}$
Réponse de l'**exercice 24** :
$A = 1/7x$ $B = -2/5x - 2/15$ $C = \dfrac{2}{a}$ $D = \dfrac{1}{2a+1}$

$E=\dfrac{x-1}{x+1}$ $F=\dfrac{x}{x+1}$ $G=\dfrac{1}{x+2}$ $H=-\dfrac{x+4}{x(x+2)}$

$I=\dfrac{2x}{x+1}$ $J=\dfrac{2}{x+2}$

Réponse de l'**exercice 25** :

$$A=a^2x-2axb+b^2x \quad B=0 \quad C=2a^3-6abc+2b^3+2c^3$$
$$D=a^2b-ca^2+b^2c-b^2a+c^2a-bc^2 \qquad E=a^2+b^2+c^2$$
$$F=a^4+b^4+c^4-a^3b-a^3c-ab^3-ac^3-b^3c-bc^3+a^2bc+ab^2c+abc^2$$

Réponse de l'**exercice 26** :

$A=\dfrac{x^2}{3(x-1)}$ $\qquad B=\dfrac{1}{5x}$ $\qquad C=\dfrac{3}{5}a\dfrac{a-b}{a+b}$

$D=\dfrac{4}{5}\dfrac{a+b}{a^3}$ $\qquad E=1$ $\qquad F=\dfrac{2x}{x-1}$

$G=\dfrac{a-b}{a+b}$ $\qquad H=\dfrac{a+b}{a-b}$

Réponse de l'**exercice 27** :
Toujours vrai ! On obtient en effet $(x-5)^2\geqslant 0$

Réponse de l'**exercice 28** :

$A=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$ $\qquad B=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$C=(4a-1)^2$ $\qquad D=(a^2-2b^2)^2$

$E=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$ $\qquad F=(a+b)(a-b)(2a^2+1+2b^2)$

$G=(a-1)(a^{2n-1}+a^{2n-2}+\cdots+1)$ $\qquad H=(a+1)(a^{2n}-a^{2n-1}+a^{2n-2}\cdots+1)$

$J=(a-1)(a+2)(a+1)$ $\qquad K=(a-2b)(a+2b)$

$L=(2a-b)^2$ $\qquad P=(a-b)^2$

$M=a^{2n}-2^{2n}=(a-2)(a^{2n-1}+2a^{2n-2}+2^2a^{2n-3}+\cdots+2^{2n-1})$

Réponse de l'**exercice 29** :

$A_n=\dfrac{3^{2n+1}-1}{2}$ $\qquad B_n=\dfrac{(-4)^{n+1}-1}{5}$

$C_n=\dfrac{1+(-1)^na^{2n+2}}{1+a^2}$ $\qquad D_n=\dfrac{5}{126}((-5)^{3n+3}-1)$

Réponse de l'**exercice 30** :

$A_n=\dfrac{9}{2}(3^{n+1}-1)$ $\qquad C_n=\dfrac{3^{n+2}(3^{n+3}-1)}{2}$

$B_n=a^2\dfrac{a^{2n}-1}{a^2-1}$ si $|a|\neq 1,\ n$ si $a=1$

Réponse de l'**exercice 31** :

1. $4\ln 2 \quad 9\ln 2 \quad -3\ln 2 \quad \dfrac{1}{2}\ln 2 \quad 3\ln 2$
2. $2\ln 2+2\ln 3 \quad -\ln 3-2\ln 2 \quad 2\ln 3-2\ln 2 \quad \ln 3+11\ln 2$
3. $3\ln 5+2\ln 2 \quad -2\ln 5+4\ln 2 \quad 2\ln 5-2\ln 2 \quad -2\ln 2-2\ln 5$

Réponse de l'**exercice 33** : on trouve $y=17+12\sqrt{2}$

Réponse de l'**exercice 34** : $A=B=0$

Réponse de l'**exercice 35** :
$8 \quad \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{3} \quad \dfrac{1}{9} \quad -\dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{5}$

Réponse de l'**exercice 37** : dans les deux cas, si x est solution de l'équation considérée, alors x vérifie $x^2+13x-26=0$. Ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1=\dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-13+\sqrt{273}}{2}$. Or $-x_1-5>0$ et $-x_2-5<0$, donc le premier membre de ces deux équations n'est pas défini en x_2 et x_1 est la seule solution possible pour les deux équations. Pour le second membre, on a : $\dfrac{x_1-61}{x_1+7}>0$ mais $x_1-61<0$ donc la première équation n'admet aucune solution et la seconde en admet une seule, à savoir x_1.

Réponse de l'**exercice 38** :
$a=\dfrac{3}{2} \quad b=-2 \quad c=\dfrac{1}{\ln 2} \quad d=-17 \quad f=1 \quad g=-1 \quad h=e$

Réponse de l'**exercice 39** :
la fonction est impaire ; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$

Réponse de l'**exercice 40** :

on trouve : $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x>1 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ -1 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x<-1 \end{cases}$

Réponse de l'**exercice 41** :

(1) $\quad x\geqslant\dfrac{\ln 12+5}{3} \qquad x\in[0,1]$ $\quad$ (2)

(3) $\quad x\geqslant\dfrac{2}{e} \qquad x\geqslant-\dfrac{1}{12}$ $\quad$ (4)

Réponse de l'**exercice 42** :

1. $4,8<a+b<5 \quad 5,12<ab<5,61 \quad \dfrac{3,2}{1,7}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{3,3}{1,6}$
2. $-1,7<a+b<-1,5 \quad -5,61<ab<-5,12 \quad -\dfrac{3,3}{1,6}<\dfrac{a}{b}<-\dfrac{3,2}{1,7}$
3. $-5<a+b<-4,8 \quad 5,12<ab<5,61 \quad \dfrac{3,2}{1,7}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{3,3}{1,6}$

Réponse de l'**exercice 45** : $0 < b \leqslant b+1$ donc $\dfrac{1}{b+1} \leqslant \dfrac{1}{b}$ etc.

Réponse de l'**exercice 46** : Si $a < b$ alors $\dfrac{a-1}{b-1} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+1}{b+1}$.

Réponse de l'**exercice 47** : la fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$; elle est π-périodique et impaire, strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, de limite $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes de cet intervalle.

Réponse de l'**exercice 48** :

$\mathcal{S}_1 = \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_2 = \left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{5} ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_3 = \left\{\dfrac{2\pi}{3} + k\dfrac{4\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2\pi}{5} + k\dfrac{4\pi}{5} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_4 = \emptyset$
$\mathcal{S}_5 = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{10} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_6 = \left\{\dfrac{\pi}{16} + k\dfrac{\pi}{4} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_7 = \left\{\dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{5k\pi}{6} ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{4} + 5k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_8 = \left\{\dfrac{\pi}{22} + \dfrac{2k\pi}{11} ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_9 = \{\pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_{10} = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_{11} = \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

Réponse de l'**exercice 50** :
$(S_1) x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$ $(S_2) x = \dfrac{2\pi}{3}$

Réponse de l'**exercice 51** :
$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \quad \tan\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3}+2$$

Réponse de l'**exercice 52** :
$\dfrac{\sin 2a}{\sin a} - \dfrac{\cos 2a}{\cos a} = \dfrac{1}{\cos a}$ pour $a \notin \left\{k\dfrac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Réponse de l'**exercice 53** :
$\sin x + \cos x = 1 \Longleftrightarrow \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \sin\dfrac{\pi}{4}$, d'où les solutions $\mathcal{S} = \{2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Pour la seconde équation, on trouve $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Réponse de l'**exercice 54** : Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$ et donc $2\cos^2(\pi/8) = \cos(\pi/4) + 1 = \sqrt{2}/2 + 1$. Ainsi $4\cos^2(\pi/8) = \sqrt{2} + 2$. On résout cette équation et on trouve deux solutions qui sont $\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$ et $-\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$, or $\cos(\pi/8) \geqslant 0$ donc $\cos(\pi/8) = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$.

Réponse de l'**exercice 55** : $[0, \pi/3]$

Réponse de l'**exercice 56** : $[\pi/15, 11\pi/15] \cup [-14\pi/15, -4\pi/15]$

Réponse de l'**exercice 57** :
$$x = \frac{4}{3}\ (1) \qquad x = 5\ (2) \qquad x = -\frac{29}{2} (3) \qquad x = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{5}\ (4)$$

Réponse de l'**exercice 58** : $(a) 2 ; (b) - 113/43 ; (c) - 21/5 ; (d) 0$

Réponse de l'**exercice 59** : $(a)\{1,2,3\} ; (b)\{0,3\} ; (c)\{0,5/3\} ; (d)\{-9,9\} ; (e)\{-8/3, 8/3\}$; $(f)\{0, 3/4, 4/3, -1/5\} ; (g)\{-1,1\} ; (h)\{-5, 6/5\} ; (i)\{7/2, -7/2\} ; (j)\{-1/3, 8/3, 2\}$; $(k)\{0, 2, -2\} ; (l)\{-5\}$

Réponse de l'**exercice 61** :

$a) \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}$ $\quad b) 8, 2$
$c) \sqrt{2}, \sqrt{8}$ $\quad d) a, 2$
$e) -1, -\pi$ $\quad f) 4 \pm \sqrt{2}2$
$g) -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}$ $\quad i) x = \pm 2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$
$h) 0, 6$ $\quad j) \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{26}$
$k) -3a, -a$ $\quad l) x = \pm\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$
$m) \dfrac{1}{6}, 1$

Attention ! Pas de calcul de discriminant pour h), i) et l) !

Réponse de l'**exercice 62** : $F_1(x) = \dfrac{x+4}{2x-3} ; F_2(x) = \dfrac{2x-3}{x}$

Réponse de l'**exercice 63** : $\dfrac{2}{3} \quad -\dfrac{2}{7}$
Attention, si $m = 0$, ce n'est pas une équation du second degré ! Si $m \neq 0$ alors l'autre racine est $-\dfrac{1}{m}$

Si $m \neq -3$ alors on trouve $\dfrac{2m}{m+3}$

Réponse de l'**exercice 64** :

(1) $\dfrac{10}{7}, 5$ (2) $0, \dfrac{1}{3}$
(3) $x = \pm 7$ (4) $-1, -7$

Réponse de l'**exercice 65** :

(1) $x \in \left]\dfrac{1}{3}; 5\right[$ (2) $x \in \left]-3; \dfrac{5}{2}\right[$ (3) $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; 5\right[$

Réponse de l'**exercice 66** :

a) toujours vrai b)toujours vrai
c) $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[\cup]2, +\infty[$ d) $\left]0, \dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\right] \cup \left]2, +\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}\right]$
e) $]-\infty, 1[\cup]1, 3[\cup]4, +\infty[$ f) $[1, 2] \cup [4, 7]$
g) $[2, 5] \cup [9, 12]$ h)$]1, +\infty[$

Réponse de l'**exercice 67** : On trouve 2 racines réelles : $\pm\sqrt{5}$ et 2 complexes $\pm i$.

Réponse de l'**exercice 68** : On trouve $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{6}$ d'où $\sin\theta = \dfrac{1-\sqrt{17}}{6}$ et $\cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{17}}{6}$. On en déduit $\sin 2\theta = -\dfrac{8}{9}$ et $\cos 2\theta = \dfrac{\sqrt{17}}{9}$

Réponse de l'**exercice 69** : Pour la première : $\ln x = -6$ ou 7
d'où $x = \mathrm{e}^{-6}$ ou e^{7}. Pour la seconde : $\ln^2 x = 7$ donc $x = \mathrm{e}^{\sqrt{7}}$ ou $x = \mathrm{e}^{-\sqrt{7}}$

Réponse de l'**exercice 70** : Le signe d'un produit est le même que celui d'un quotient ! Pour la deuxième question, la réponse est non, -5 convient dans un cas et pas dans l'autre.

Réponse de l'**exercice 71** :

$\left]-1, \dfrac{7}{2}\right[$ (1) $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ (2)
$]-\infty, -\dfrac{1}{4}[\cup]1, +\infty[$ (3) $[-9, 1]$ (4)
$\left[-9-6\sqrt{2}, -9+6\sqrt{2}\right]$ (5) $]1, 7[$ (6)
$\{3\}$ (7) $]-\infty, -1[$ (8)
$]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$ (9) $]-\infty, -1[\cup]5/2, +\infty[$ (10)
$[1, 7]$ (11) $\emptyset$ (12)
$]-\infty, -2[\cup]2/3, +\infty[$ (13)

Si $m > \dfrac{1}{2}$ alors on trouve $]-\infty, \dfrac{1}{2}[\cup]m, +\infty[$ pour l'équation (14) (autre cas analogue) ; et si $m = \dfrac{1}{2}$ tout réel distinct de $\dfrac{1}{2}$ convient.

Réponse de l'**exercice 73** :

(1) $-1 \leqslant x \leqslant 7$ (2) $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 2$ (3) toujours vrai !
(4) $x \notin]-4; -\dfrac{2}{3}[$ (5) $-2 \leqslant x \leqslant 5$

Réponse de l'**exercice 74** : $a = 24 + 7i$ $b = 8 - 6i$ $c = 7$ $d = 1 - i$ $e = \dfrac{3}{11} + i\dfrac{\sqrt{2}}{11}$ $f = \dfrac{-1}{3} + i\dfrac{-\sqrt{2}}{3}$ $g = \dfrac{-4}{13} + i\dfrac{-19}{13}$ $h = 3i$ $k = \dfrac{12+9i}{25}$ $l = \dfrac{8+i}{5}$ $m = \dfrac{9}{10} + i\dfrac{23}{10}$

Réponse de l'**exercice 75** : $\overline{Z} = 2i + 3\overline{z}$; $\overline{Z} = 3 - i + 2i\overline{z}$; $\overline{Z} = (2 + i\overline{z})(2\overline{z} - 4 - 3i)$; $\overline{Z} = \dfrac{1 - 2i + i\overline{z}}{-5i + 2\overline{z}}$

Réponse de l'**exercice 76** : $\mathrm{e}^{i\alpha} \times \mathrm{e}^{i\alpha'} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\alpha') + i\sin(\alpha')) = (\cos(\alpha)\cos(\alpha') - \sin(\alpha)\sin(\alpha')) + i(\sin(\alpha)\cos(\alpha') + \sin(\alpha')\cos(\alpha)) = \cos(\alpha + \alpha') + i\sin(\alpha + \alpha') = \mathrm{e}^{i(\alpha+\alpha')}$; $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\alpha}} = \dfrac{1}{\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \mathrm{e}^{-i\alpha} = \overline{\mathrm{e}^{i\alpha}}$

Réponse de l'**exercice 77** :

$a = 1$ $b = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $c = 1$ $d = -1$ $f = 1$ $g = -i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$
$h = -i$ $j = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$ $k = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$ $l = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$ $m = \mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{4}}$

Réponse de l'**exercice 78** :
$\omega^{2016} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$

Réponse de l'**exercice 80** : $j^3 = e^{2i\pi} = 1$; $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$

$z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $z_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$ donc $z_1 - 1 = j$ et $z_2 - 1 = j^2$
D'où $(z_1 - 1)^{n+2} + z_1^{2n+1} = j^{n+2} + e^{\frac{2i\pi n + i\pi}{3}} = j^n(j^2 + e^{\frac{i\pi}{3}}) = j^n(j^2 + j + 1) = 0$;
et $(z_2 - 1)^{n+2} + z_2^{2n+1} = j^{2n+4} + e^{\frac{-2i\pi n - i\pi}{3}} = j^{2n}(j + e^{\frac{-i\pi}{3}}) = j^{2n}(j + j^2 + 1) = 0$.
Enfin, $(1 + j)^3 + (1 + j^2)^3 = (-j^2)^3 + (-j)^3 = -j^6 - j^3 = -2$

Réponse de l'**exercice 81** : $0, \dfrac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, +\infty$

Réponse de l'**exercice 82** : -1 ; 0 ; -1 ; $\dfrac{1}{2}$; 2

Réponse de l'**exercice 83** : $0, 1, +\infty, 1, \dfrac{1}{2}, +\infty, \dfrac{1}{2}, 0$

Réponse de l'**exercice 84** :

$$x \mapsto -\frac{1}{x^2} \qquad x \mapsto -\frac{2}{x^3} \qquad x \mapsto -3\frac{1}{x^4} \qquad x \mapsto -4\frac{1}{x^5} \qquad \dots$$

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} \qquad x \mapsto -\frac{2}{(x-1)^3} \qquad x \mapsto \frac{3}{(x-1)^4} \qquad x \mapsto -\frac{4}{(x-1)^5} \qquad \dots$$

$$x \mapsto -2\frac{1}{(2x+1)^2} \qquad x \mapsto -\frac{4}{(2x+1)^3} \qquad x \mapsto -\frac{6}{(2x+1)^4} \qquad x \mapsto -\frac{8}{(2x+1)^5} \qquad \dots$$

Réponse de l'**exercice 85** :

$f_1' : x \mapsto 3(x-1)^2$ $\qquad$ $f_2' : x \mapsto 6x(x^2-1)^2$ $\qquad$ $f_3' : x \mapsto 6(x-1)$

$f_4' : x \mapsto 2x-3$ $\qquad$ $f_5' : x \mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$ $\qquad$ $f_6' : x \mapsto -\dfrac{5}{(2+x)^2}$

$f_7' : x \mapsto \dfrac{4}{(1-x)^2}$ $\qquad$ $f_8' : x \mapsto 6x + \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $f_9' : x \mapsto -3x^2+18x-26$

$g_1' : x \mapsto -3\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ $\qquad$ $g_2' : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-x+2)^2}$ $\qquad$ $g_3' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

$g_4' : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ $\qquad$ $g_5' : x \mapsto \dfrac{2}{5}\dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{4}{5}}}$ $\qquad$ $g_6' : x \mapsto \dfrac{1}{(-x+2)^2}$

$g_7' : x \mapsto -2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ $\qquad$ $g_8' : x \mapsto -2\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ $\qquad$ $g_9' : x \mapsto 2\cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x$

$g_9' : x \mapsto 2\cos x(1-3\sin^2 x)$

$h_1' : x \mapsto -6\sin x(2\cos x - 1)$ $\qquad$ $h_2' : x \mapsto \dfrac{-\sin^3 x}{(1+\cos^2 x)^2}$ $\qquad$ $h_3' : x \mapsto 4\cos^2 x + \cos x - \sin x - 2$

$h_4' : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}$ $\qquad$ $h_5' : x \mapsto \dfrac{5}{5x-1}$ $\qquad$ $h_6' : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$

$h_7' : x \mapsto \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$ $\qquad$ $h_8' : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ $\qquad$ $h_9' : x \mapsto \dfrac{2}{2x-7}$

$u_1' : x \mapsto \ln x$ $\qquad$ $u_2' : x \mapsto 3\mathrm{e}^{3x}$ $\qquad$ $u_3' : x \mapsto (2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x+1}$

$u_4' : x \mapsto \cos x \mathrm{e}^{\sin x}$ $\qquad$ $u_5' : x \mapsto -2\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ $\qquad$ $u_6' : x \mapsto (1+\ln x)\mathrm{e}^{x\ln x}$

$u_7' : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1-\dfrac{1}{x})$ $\qquad$ $u_8' : x \mapsto \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1}$ $\qquad$ $u_9' : x \mapsto \dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$

$v_1' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ $\qquad$ $v_2' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)^{\frac{3}{2}}}$

$v_3' : x \mapsto \cos x\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin x}(1-\sin x)^{3/2}}$ $\qquad$ $v_4' : x \mapsto \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

Réponse de l'**exercice 86** : $x \mapsto \ln|x|$

Réponse de l'**exercice 87** :
A une constante additive près, on trouve :

$$x \mapsto \frac{1}{17}x^{17} - \frac{5}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{12} - \frac{1}{3}x^9 + 4x^5 + 14x^4 + 17x^3 + 9x^2 + x$$

$f_1 : x \mapsto \ln|x|$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x^3}$

$g_1 : x \mapsto -\ln|1-x|$ $\qquad$ $g_2 : x \mapsto -\dfrac{1}{x-1}$ $\qquad$ $g_3 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $g_4 : x \mapsto -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(x-1)^3}$

$h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|2x+1|$ $\qquad$ $h_2 : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2x+1}$ $\qquad$ $h_3 : x \mapsto -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ $\qquad$ $h_4 : x \mapsto -\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(2x+1)}$

Réponse de l'**exercice 88** : A une constante additive près :

$a) x \mapsto \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $b) x \mapsto \dfrac{1}{20}(2x^2+1)^5$ $\qquad$ $c) x \mapsto \dfrac{1}{4}(x-1)^4$

$e) x \mapsto \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{3}{5}x^5 + x^3 - x$ $\qquad$ $f) x \mapsto -\dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x}$ $\qquad$ $g) x \mapsto \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x$

$h) x \mapsto -\dfrac{1}{2}\cos 2x$ $\qquad$ $i) x \mapsto \dfrac{1}{3}\sin 3x$ $\qquad$ $j) x \mapsto x - \tan x$

$k) x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|x^2+2x|$ $\qquad$ $l) x \mapsto \dfrac{1}{6}(x^2-1)^6$ $\qquad$ $m) x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x^2+2)}$

$n) x \mapsto \ln|x-3|$ $\qquad$ $o) x \mapsto -\dfrac{1}{x^2+x+3}$ $\qquad$ $p) x \mapsto \dfrac{1}{3}\ln|x^3-1|$

$q) x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ $\qquad$ $r) x \mapsto \dfrac{1}{5}\ln(5\mathrm{e}^x+1)$ $\qquad$ $s) x \mapsto \dfrac{3}{8}(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{4}{3}}$

$t) x \mapsto -\ln|\cos x|$ $\qquad$ $u) x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ $\qquad$ $v) x \mapsto 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

$w) x \mapsto \dfrac{15}{2}x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ $y) x \mapsto -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ $\qquad$ $z) x \mapsto -2\sqrt{\mathrm{e}^x}$

$\alpha) x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ $\qquad$ $\beta) x \mapsto -\mathrm{e}^{\cos x}$ $\qquad$ $\gamma) x \mapsto -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$\delta) x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^x}}$ $\qquad$ $\varepsilon) x \mapsto \ln|\cos x + \sin x|$

Réponse de l'**exercice 89** :

$$I_1 = \ln 2 \qquad I_2 = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}) \qquad I_3 = \frac{3}{2}\ln 10 \qquad I_4 = 2\ln\frac{63}{55} \qquad I_5 = 0$$