Révisions de Terminale à Sup : exercices de calcul[1]

Ce recueil d'exercices a été conçu pour faciliter la transition entre la Terminale et la Sup. Il est passablement long et, hélas, extrêmement rasoir. Mais quand on demande à vos prédécesseurs ce qu'ils ont pensé de cette série d'exercices en septembre à leur arrivée en sup, ils la vilipendent allègrement ; quand on leur repose la même question en juin, leur réponse est non moins unanime :

c'était indispensable, surtout ne changez rien.

Le but est double :

- d'abord et fondamentalement de vous entraîner pour gagner en RAPIDITÉ et surtout en FIABILITÉ dans toute séquence de calcul quelle qu'elle soit : additionner deux fractions, développer un produit, calculer sur les puissances, dériver ou intégrer etc.
- Pour certains thèmes, le deuxième objectif est de développer des automatismes de RIGUEUR : de même que vous avez rabaché les exercices de grammaire pour savoir qu'après l'article « les » le nom est au pluriel, ce que vous écrivez de façon machinale sans y penser, de même vous devez acquérir des réflexes mathématiques tels que s'assurer *avant* de prendre un logarithme que la quantité en question est positive, discuter en fonction du signe d'une expression dont on voudrait prendre la racine, évidemment vérifier qu'on ne divise pas par zéro etc.

Essayez de faire ces exercices AVEC INTELLIGENCE : à chaque calcul, demandez-vous comment vous pouvez vérifier que votre résultat est juste, quels détrompeurs vous pouvez utiliser, quelle formule ou quel résultat de cours vous a permis de passer d'une ligne à une autre ; ainsi, prendre une valeur particulière d'un paramètre, vérifier que votre solution d'une équation est bien solution, vérifier un signe, intégrer la dérivée que vous venez de calculer pour voir si vous retombez bien sur la fonction de départ, etc. La quantité de calculs faits n'est clairement pas l'unique gage de l'efficacité de votre travail, qui ne sera pleinement efficace que si votre réflexion est réellement de qualité.

Ne vous laissez pas surprendre par la longueur, ce poly d'exercices est vraiment très copieux : vous ne ferez pas tout en deux jours avant la rentrée : anticipez ! Vous pouvez à votre guise travailler ces exercices un petit peu chaque jour pendant les deux mois d'été, ou au contraire y consacrer une quinzaine de jours à la fin des vacances.

Les exercices sont regroupés par thème, ce qui ne veut pas dire qu'il faut traiter tous les exercices d'un même thème d'affilée. Répartissez chaque thème sur plusieurs jours et travaillez plusieurs thèmes, deux ou trois, en parallèle chaque jour.

Certaines sections vous invitent explicitement à faire et refaire les calculs à la manière d'un entraînement systématique sportif ou musical : c'est effectivement l'idéal. Mais si vous devez opérer des choix stratégiques faute de temps – ce que nous ne vous encourageons pas à faire – les quatre paragraphes finaux, Calcul matriciel, Dénombrement, Probabilités, Arithmétique ne sont pas les plus urgents à traiter. En revanche Dérivation et Intégration, Nombres complexes et Trigonométrie sont fondamentaux.

Le Devoir de Calculs portera sur l'intégralité des sections 1 à 7.

1. Il se peut, il est même certain que certaines réponses sont erronées ;
merci de les signaler à l'adresse sylvain.wolf@ac-versailles.fr (PCSI) ou mathilde.cv@free.fr (MPSI)

1 Mise en jambe

Objectif des premières sections de ce polycopié : remise en forme après la pause estivale.
En pratique traiter un maximum d'exercices de chaque section.

1.1 Pour se faire la main...

Exercice 1. Calculer de deux façons

$$A = \left(-\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + 1\right) - \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{5} - 2\right) + \left(-2 + \frac{5}{3}\right)$$

- en calculant d'abord chaque parenthèse
- en supprimant les parenthèses et en regroupant les termes qui donnent un résultat simple

Réponse : voir page 47

Exercice 2. Supprimer les parenthèses et les crochets dans les expressions suivantes (*les réponses doivent être ordonnées, par exemple selon l'ordre alphabétique*) :

$A = ((a-c)-(a-b)) - ((b-c)-(a+c)) \qquad B = (a-b+c) - (2a-3b-4c) + (b-a)$

$C = [12 - (a-b+6)] - [15 + (b-a-15)] \qquad D = [(a-b)-(5-a)] + [b-7-(a-3)]$

Réponse : voir page 47

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes

$$A = \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - 1} \qquad B = \frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{5}} \qquad C = \frac{-3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 + \frac{2}{5} - \frac{2}{3}}$$

Réponse : voir page 47

Exercice 4. Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = 5(3a^2 - 4b^3) - [9(2a^2 - b^3) - 2(a^2 - 5b^3)] \qquad B = 3a^2(2b-1) - [2a^2(5b-3) - 2b(3a^2+1)]$

Réponse : voir page 47

1.2 Puissances

Le calcul sur les puissances pose des difficultés toute l'année, et en particulier le fameux x^{α^β} : il est conseillé de travailler cette section plusieurs fois, en en faisant plusieurs fois les exercices.

Pour x un réel (ou complexe) non nul et n un entier naturel non nul, par définition on a :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \text{ et } \; x^0 = 1$$

Règles de calcul : pour x, y **deux réels non nuls** et m, n deux entiers relatifs

$$x^m \times x^n = x^{m+n} \text{ et } (xy)^m = x^m \times y^m$$
$$\frac{1}{x^m} = x^{-m} \text{ et } \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$
$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Convention usuelle : « x^{m^n} » souffre d'un problème de parenthésage et pourrait désigner $(x^m)^n$ et $x^{(m^n)}$. Or les règles de calcul donnent $(x^m)^n = x^{mn}$; donc on convient habituellement que la notation x^{m^n} désigne $x^{(m^n)}$.

Règle d'écriture : lorsqu'on a un produit, on n'écrit pas $b\times 2\times 3\times a$ et encore moins $(b \times 2) \times (a \times 3)$, même au cours d'un calcul : on écrit directement $6ab$ en *respectant impérativement l'ordre alphabétique* des lettres.

Exercice 5. Calculer les expressions suivantes :

$$A = (7xy)^3 \qquad A_1 = (3x^2y)^2 \qquad B = (2a^2b^3)^5$$

$$C = [(-\frac{a}{b})^3]^2\times[(-b)^2]^3 \qquad D = xy\times(-\frac{2}{3})x^2\times\frac{3}{4}y^2 = -\frac{1}{2}x^3y^3 \qquad E = (\frac{2}{7})a^2\times(-\frac{3}{4})xy^3\times(-\frac{2}{5})a^2x$$

$$F = (-\frac{3}{5})a^2 \cdot (\frac{2}{3})b^2x \cdot (-x)^4 \qquad G = 4x^3 \cdot (-3y^2) \cdot (-\frac{5}{6})a^2x^2y^5$$

Réponse : voir page 47

Exercice 6. Simplifier :

$$A = \frac{4^{12}}{2^{25}} \qquad B = \frac{3}{2}\frac{2^n}{3^{n+1}} \qquad E = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$F = (-1)^3\left(-\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\frac{1}{14}\right)$$

$$G = 77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7\times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-8})^{-3} \times \frac{1}{(-11)^{-3}}$$

$$K = (a^{n^2})^2 \qquad L = \frac{a^{n^2}}{a^n} \qquad M = a^{3n}(a^n)^3 \qquad P = (a^n)^n$$

où a est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

Réponse : voir page 47

Exercice 7. (**exercice fondamental**)

Exprimer en fonction de e^x les nombres suivants :
$A = \mathrm{e}^{kx}$ $B = \mathrm{e}^{-x}$ $C = \mathrm{e}^3\mathrm{e}^{3x-1}$ $D = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+1}$ $E = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ $F = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x} + 3$

Réponse : voir page 47

1.3 Sommes et produits de polynômes

> Ces calculs n'ont absolument aucun intérêt si vous les présentez mal : la règle est de ne jamais écrire une somme de termes en vrac, par exemple le résultat du développement d'un produit ; présentez les calculs en utilisant à la fois des lignes et des colonnes, de façon à ce que le calcul soit lisible et que le résultat soit juste.

Les "polynômes" seront définis pendant l'année, mais vous avez déjà travaillé avec des expressions polynomiales, par exemple $x^2 - 3x + 1$ ou $x - 2x^3 + 1$.
Un polynôme doit impérativement être ordonné selon les puissances croissantes (ou décroissantes). Par exemple, on n'écrit JAMAIS $x - 2x^3 + 1$, mais $-2x^3 + x + 1$.

Exercice 8. Réduire et ordonner les polynômes suivants :
$P(x) = 7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2$
$Q(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - 3x^2 + \frac{x}{6} - \frac{5}{2}x^2 + 5 + 4x^2$
$R(x) = \frac{3}{2}x^2 + xy + y^2 - 2xy + \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}x^2$
$S(a) = 4a^2 - \frac{2}{3}a - \frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a - 5a + \frac{2}{15}a^2 - \frac{3}{4}$
$T(x) = 4x^2 - \frac{7}{2} + \frac{3}{5}x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 5 + \frac{3}{2}x^3 + 7 - 2x$

Réponse : voir page 47

Somme de polynômes

Présentation des calculs

On considère les polynômes :
$A = 2 - 5x + 4x^3$ $\qquad B = -8x + 4x^2 + 6$ $\qquad C = -2x^3 + 3 + x^2 + 2x$
Pour calculer la somme $A - B + C$, on recopie sur 3 lignes les polynômes ordonnés, en laissant de l'espace pour les puissances manquantes :

$$\begin{array}{rcrrrr} A & = & 4x^3 & & -5x & +2 \\ -B & = & & -4x^2 & +8x & -6 \\ C & = & -2x^3 & +x^2 & +2x & +3 \end{array}$$

puis on additionne par colonnes.
On trouve immédiatement $A - B + C = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

Exercice 9. Former les polynômes

$$A+B+C \quad A-B+C \quad A+B-C \quad -A+B+C$$

avec $A = 3x^2 - 4x + 5 \quad B = 2x^2 + 4 - 5x \quad C = 3 - x + 4x^2$

Réponse : voir page 47

Exercice 10. Même question avec

$$A = 5a^2 - 3ab + 7b^2 \quad B = 9b^2 - 8ab + 6a^2 \quad C = -7b^2 - 3ab + 4a^2$$

Réponse : voir page 47

Produit de deux polynômes à une variable

Présentation des calculs

Après avoir ordonné les polynômes, on peut disposer les calculs comme une multiplication d'entiers à l'école primaire, en réservant de l'espace pour les puissances manquantes.
Par exemple considérons les polynômes $\qquad A = 3x^3 - 2 + 5x \quad$ et $\quad B = 2x^2 - 4x + 3.$
Calculer le produit $A.B$

$$\begin{array}{rrrrrrr} AB = & & & +9x^3 & & +15x & -6 \\ & & -12x^4 & & -20x^2 & +8x & \\ & +6x^5 & & +10x^3 & -4x^2 & & \\ \hline = & 6x^5 & -12x^4 & +19x^3 & -24x^2 & +23x & -6 \end{array}$$

Exercice 11. Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :

$A = (4x^5 + 7 - 2x^3)(x^3 - 2x)$ $\quad B = (5x^3 - 2x)(3x - 4x^2)$

$C = (7x^4 - 2x^3 + 4x^2)(3x^2 - 5)$ $\quad D = (2x^2 - 4 + 2x)(x^2 + 5 - 2x)$

$E = (2x - 7x^2 + 5x^3)(3x - 5x^2 + 8)$ $\quad F = (\frac{5}{4}x^3 - 2x + \frac{1}{2})(\frac{7}{2}x^3 - 2x + \frac{1}{2})$

$G = (3x^2 - 1)(x + 1)(x - 1)$ $\quad H = (4x^3 - 7x + 2x^2 + 5)^2$

Réponse : voir page 47

1.4 Calculs de factorielles

Définition

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on pose $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Par convention $0! = 1$

Exercice 12. Simplifier $\frac{12!}{8!}$ $\quad \frac{12!}{3!10!}$ $\quad \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!}$.

Réponse : voir page 47

Exercice 13. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et (a, b) deux réels strictement positifs, simplifier

$$A_n = \frac{(n+3)!}{(n+1)!} \qquad B_n = \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \qquad C_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ où } u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}$$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 47

Exercice 14. Factoriser les expressions suivantes :

$$A_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n^2+1}{n(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n-1)!} \qquad B_n = \frac{1}{nn!} - \frac{1}{n(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!}.$$

Réponse : voir page 47

Définition

On définit les coefficients binômiaux pour tout entier naturel non nul n et tout entier k compris entre 0 et n par la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Exercice 15. Montrer qu'avec les notations ci-dessus on a

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2 Calcul formel

Objectif des paragraphes suivants : développer une aisance en calcul formel : identités remarquables, premier et second degré.
En pratique les identités remarquables sont à connaître et à reconnaître, que ce soit pour développer ou pour factoriser – en Mathématiques on factorise nettement plus souvent qu'on ne développe ! ; et il faut arriver à sortir du « tout discriminant »sur les trinômes !

2.1 Equations polynômiales du premier degré

Rappel : si a, b, c et d sont des nombres réels (ou complexes) et b et d ne sont pas nuls, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$.

Exercice 16. Résoudre les équations suivantes

$$3x = 4 \ (1) \qquad \frac{4}{x-3} = 2 \ (2) \qquad \frac{2x+3}{x-5} = \frac{4}{3} \ (3) \qquad \frac{3}{x-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-x} \ (4)$$

Réponse : voir page 48

Exercice 17. Résoudre les équations suivantes :
(a) $5(2x-3) - 4(5x-7) = 19 - 2(x+11)$; (b) $4(x+3) - 7x + 17 = 8(5x-3) + 166$
(c) $17 - 14(x+1) = 13 - 4(x+1) - 5(x-3)$; (d) $17x + 15(x-1) = -1 - 14(3x+1)$

Réponse : voir page 48

Exercice 18. Résoudre les équations suivantes :

(a) $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$	(b) $x^2 - 3x = 0$
(c) $-\dfrac{3}{5}x^2 + x = 0$	(d) $x^2 = 81$
(e) $9x^2 = 64$	(f) $x(5x+1)(4x-3)(3x-4) = 0$
(g) $x(x+1) = x+1$	(h) $(x+5)(4x-1) + x^2 - 25 = 0$
(i) $4x^2 - 49 = 0$	(j) $(3x+1)(x-3)^2 = (3x+1)(2x-5)^2$
(k) $3x^3 - 12x = 0$	(l) $\dfrac{5x-1}{3x+2} = \dfrac{5x-7}{3x-1}$

Réponse : voir page 48

2.2 Identités remarquables

Formulaire

Démontrer (et apprendre) les identités suivantes :
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab.$

Factorisation pour a, b réels (ou complexes) et n un entier naturel non nul :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})}$$

Cette formule est à mettre en relation avec la somme de termes d'une suite géométrique rappelée un peu plus loin ci-dessous.

Exercice 19. Démontrer que pour tous réels a, b, c on a les égalités :

$$\begin{aligned}
(a+b)^2-(a-b)^2 &= 4ab \\
a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2)
\end{aligned}$$

Exercice 20. Factoriser

$A = x^2-2x+1$	$B = x^2+x+\frac{1}{4}$	$C = 4x^2-4x+1$
$D = a^2+4a+4$	$E = 4x^3+8x^2y+4xy^2$	$F = (x+y)^3-x^3-y^3$
$G = (x-y)^3-x^3+y^3$	$H = x^3+27y^3$	$K = 8a^3-125$

Réponse : voir page 48

Exercice 21. Compléter de façon à obtenir une expression de la forme $(T+U)^2$

$A = x^2+\cdots+16$	$B = x^2-\cdots+9a^2$	$C = 4x^2-4x+\ldots$
$D = 9x^2+6x+\ldots$	$E = x^2+\cdots+y^4$	$F = 4a^2x^2-\cdots+1$

Réponse : voir page 48

Exercice 22. Pour a, b réels et n un entier naturel non nul, factoriser

$A = a^5 - b^5$	$B = a^5 + b^5$	$C = 16a^2 - 8a + 1$	$D = a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4$
$E = a^3 - 8b^3$	$F = a^2 + 2a^4 - b^2 - 2b^4$	$G = a^{2n} - 1$	$H = a^{2n+1} + 1$
$J = a^3 + 8 + (a+2)(2a-5)$	$K = a^2 - 4b^2$	$L = 4a^2 + b^2 - 4ab$	$M = a^{2n} - 4^n$
$P = (a+b)^2 - 4ab$			

Réponse : voir page 48

Exercice 23. Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (a+b)(a+x)(b+x) - a(b+x)^2 - b(a+x)^2$

$B = bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) + (b-c)(c-a)(a-b)$

$C = (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

$D = (b-c)(x-a)^2 + (c-a)(x-b)^2 + (a-b)(x-c)^2$

$E = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 - (a+b+c)^2$

$F = a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b)$

Réponse : voir page 48

Somme des termes d'une suite géométrique

pour q réel (ou complexe) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Exercice 24. Calculer en fonction de n

$A_n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^{2n}$ $\qquad B_n = -1 + 4 - 16 \cdots + (-1)^{n-1}4^n$

$C_n = 1 - a^2 + a^4 - a^6 + \cdots + (-1)^n a^{2n}$ $(\star)$ $\qquad D_n = u_0 + \cdots + u_n$ où $u_n = (-5)^{3n+1}$ $(\star\star)$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 48

Exercice 25. Calculer $A_n = 9 + 27 + \cdots + 3^{n+2}$ (on factorisera par 3^2 pour se ramener à la formule encadrée).

Calculer de même $B_n = a^2 + a^4 + \cdots + a^{2n}$ et $C_n = 3^{n+2} + 3^{n+3} + \cdots + 3^{2n+4}$.

Réponse : voir page 48

2.3 Trinômes réels

Dans cette section, le but est de ne pour ainsi dire jamais utiliser les formules expliciter avec le discriminant – qu'en général vous maîtrisez bien !, pour **développer d'autres compétences** : racines évidentes, somme et produit de racines. Il est possible de passser les exercices 34 et 35 dans un premier temps.

Soit (a, b, c) trois réels avec $a \neq 0$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines réelles si et seulement si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif ou nul.
Dans ce cas ces racines valent $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, la somme des racines vaut alors $S = -\dfrac{b}{a}$ et le produit vaut $P = \dfrac{c}{a}$.
Si le discriminant est nul, il y a alors une racine double qui vaut $-\dfrac{b}{2a}$.
Enfin, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines s'il y en a.

Exercice 26. Démontrer les résultats ci-dessus, et faire les représentations graphiques correspondant aux différents cas.

Remarque : (essayer de) ne pas passer à côté d'éventuelles racines « évidentes » !

En effet, on a l'égalité : $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$.

Exemple d'utilisation : si l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet deux solutions α et β, alors leur somme vaut 5 et leur produit 6.

Or $6 = 6 \times 1 = 3 \times 2$; et $6 + 1 = 7$ et $3 + 2 = 5$.

On obtient ainsi facilement et sans calcul l'égalité $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$: les solutions sont donc 2 et 3.

Exercice 27. Résoudre les équations suivantes :

$a) 8x^2 - 6x + 1 = 0$	$b) x^2 - 10x + 16 = 0$
$c) x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{8})x + 4 = 0$	$d) x^2 - (a+2)x + 2a = 0$
$e) x^2 + (1+\pi)x + \pi = 0$	$f) - x^2 + 8x + 6 = 0$
$g) 8x^2 + 6x + 1 = 0$	$h) - x^2 + 6x = 0$
$i) 3x^2 = 8$	$j) 169x^2 + 13x - 1 = 0$
$k) x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$	$l) - 12x^2 + 125 = 0$
$m) - 6x^2 + 7x - 1 = 0$	

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 48

Exercice 28. Après avoir précisé l'ensemble de définition, simplifier :

$$F_1(x) = \frac{x^2+5x+4}{2x^2-x-3} \qquad F_2(x) = \frac{2x^2+x-6}{x^2+2x}$$

Réponse : voir page 49

Exercice 29. Calculer la seconde racine des équations suivantes

$3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ convient

$7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ convient

$mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ convient

$(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ convient

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 49

Exercice 30. Résoudre les équations suivantes :

$$(1)\quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{7}{12} \qquad (2)\quad (3x-1)(2x+1) = 9x^2 - 1$$

$$(3)\quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{24} \qquad (4)\quad \frac{x^2-x-1}{x+2} = 2x+3$$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 49

Exercice 31. Résoudre **sans tableau de signes ni le moindre calcul** les inéquations suivantes

$$(1)\quad (3x-1)(x-5) < 0 \qquad (2)\quad (5-2x)(3+x) > 0 \qquad (3)\quad \frac{2x+1}{x-5} \leqslant 0$$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 49

Exercice 32. Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivante

a) $x^2 + 1 > 2x - 3$ b) $2x - 1 \leqslant x^2 + 4$

c) $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{3}{x-2}$ d) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x-2} \geqslant 1$

e) $(x^2-5x+4)(x^2-4x+3) > 0$ f) $(x^2-5x+4)(x^2-9x+14) \leqslant 0$

g) $5 \leqslant x^2 - 14x + 50 \leqslant 26$ h) $0 \leqslant \dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2} < 1$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 49

Exercice 33. Résoudre l'équation $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

Réponse : voir page 49

Exercice 34. On considère l'équation $9x^2 - 3x - 4 = 0$.

1.Résoudre l'équation, préciser le signe des racines et montrer que la somme de leurs carrés vaut 1.
Il existe donc un unique angle θ compris entre 0 et π, dont le sinus et le cosinus sont les racines de ce trinôme.

Calculer $\sin(\theta), \cos(\theta), \sin(2\theta), \cos(2\theta)$ et $\tan(2\theta)$.

Réponse : voir page 49

2.(facultatif) On reprend les questions précédentes **sans résoudre l'équation**. Montrer que cette équation admet deux racines distinctes de signes opposés, et que la somme de leurs carrés vaut 1.
Il existe donc un unique angle θ compris entre 0 et π, dont le sinus et le cosinus sont les racines de ce trinôme.

Calculer alors $\sin(2\theta)$ et $|\cos 2\theta|$.

Indication : voir page 44

Exercice 35. Résoudre successivement les équations suivantes

$$(\ln x)^2 - \ln x - 42 = 0 \qquad (\ln x)^2 - \frac{42}{(\ln x)^2} = 1$$

Réponse : voir page 49

Exercice 36. Montrer que les inéquations $\dfrac{x+5}{x-5} < 0$ et $x^2 - 25 < 0$ ont le même ensemble de solutions. Les inéquations $\dfrac{x+5}{x-5} \leqslant 0$ et $x^2 - 25 \leqslant 0$ ont-elles le même ensemble de solutions ?

Réponse : voir page 49

Exercice 37. Résoudre les inéquations suivantes :

$2x^2 - 5x - 7 < 0 \quad (1)$	$x^2 - 2x - 15 > 0 \quad (2)$
$-4x^2 + 3x + 1 < 0 \quad (3)$	$-x^2 - 8x + 9 \geqslant 0 \quad (4)$
$\dfrac{(x-3)(x-1)}{2} + 5x \leqslant \dfrac{x^2}{3} \quad (5)$	$\dfrac{(x-1)^2}{2} < 3(x-1) \quad (6)$
$4x - 3 \geqslant x^2 - 2x + 6 \quad (7)$	$(x-3)^2 > (x+5)^2 \quad (8)$
$x^2 + 3x > 0 \quad (9)$	$(2x-5)(x+1) > 0 \quad (10)$
$(1-x)(x-7) \geqslant 0 \quad (11)$	$(x-6)^2 < (x-10)(x-2) \quad (12)$
$\dfrac{2-3x}{x+2} \leqslant 0 \quad (13)$	$\dfrac{2x-1}{x-m} \geqslant 0 \quad (14)$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 49

3 Analyse (I)

Dans les parties qui suivent, on entre dans l'Analyse par les considérations de signes et la manipulation d'inégalités.
En pratique, deux objectifs : la rigueur dans les calculs et une meilleure appréhension de ce que désigne la valeur absolue.

3.1 Racines carrées

Ici, pas mal de choses à retenir : la fonction racine carrée ne prend que des valeurs positives, la technique de la quantité conjuguée, les stratégies utilisées dans le dernier exercice.

Exercice 38. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$\sqrt{(-5)^2} \qquad \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \qquad \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} \qquad \sqrt{(3-a)^2} \text{ (selon les valeurs de } a\text{)}$$

Réponse : voir page 50

Exercice 39. Ecrire aussi simplement que possible :

$$a = (2\sqrt{5})^2 \qquad b = (2+\sqrt{5})^2 \qquad c = (3+\sqrt{7})^2 - (3-\sqrt{7})^2 \qquad d = \left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$$

$$e = \left(\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad f = \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 \quad g = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 \quad h = \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Réponse : voir page 50

Quantité conjuguée

Pour rendre rationnel un dénominateur, on utilise l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Ainsi : $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} \times \dfrac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

Exercice 40. Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \quad b = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \quad c = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \quad e = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad f = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Réponse : voir page 50

Exercice 41. Vérifier les égalités suivantes :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3} \qquad \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2} \qquad \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

3.2 Valeurs absolues

Les valeurs absolues sont d'un usage quotidien en Analyse. L'objectif de cette toute section, petite par le nombre d'exercices, est de vous familiariser avec l'interprétation d'une valeur absolue : une valeur absolue représente une distance ; ainsi par exemple $|a-b| \leqslant 1$ signifie que la distance entre a et b est inférieure à 1. Cette idée sera largement étudiée en Sup, il s'agit seulement dans un premier temps de rafraîchir vos connaissances sur ce thème.

Valeur absolue

On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel, noté $|x|$, défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Si a est un réel positif on dispose de l'équivalence

$$|x| = a \Longleftrightarrow x^2 = a^2$$

Inéquations : pour un réel **positif** a on a $\boxed{\begin{array}{lll} |x| \leqslant a & \Longleftrightarrow & -a \leqslant x \leqslant a \\ |x| \geqslant a & \Longleftrightarrow & x \leqslant -a \quad \text{ou} \quad a \leqslant x \end{array}}$

Enfin pour deux réels x et y quelconques on a $\boxed{|x| \leqslant |y| \Longleftrightarrow x^2 \leqslant y^2}$

NB : en général on n'a pas $|x+y| = |x|+|y|$; on dispose seulement de l'inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x|+|y|$

Exercice 42. Représenter graphiquement les solutions des inéquations du premier encadré ci-dessus de deux façons :

- sur un axe réel
- en construisant la représentation graphique de la fonction $x \mapsto |x|$.

Exercice 43. Résoudre les inéquations suivantes :

(1) $|x-3| \leqslant 4$	(2) $|2x+1| \geqslant 5$	(3) $|x+2| > -5$
(4) $|x-1| \leqslant |2x+3|$	(5) $|-2x+3| \leqslant 7$	

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 50

3.3 Encadrements

Toute l'Analyse consiste à obtenir des encadrements et à travailler sur des inégalités. Dans cette section **IL FAUT GAGNER DES RÉFLEXES DE RIGUEUR** : passage à l'inverse, licite ou pas ? multiplication membre à membre d'inégalités, licites ou pas ? etc. Une seule façon de faire : à **chaque** étape de votre calcul, préciser sur votre feuille **la règle de calcul** que vous avez utilisée, par exemple « car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ »ce qui vous permettra de regarder si oui ou non votre inégalité était bien dans $\mathbb{R}_+^\star$...

Pour essayer de minimiser les erreurs de calcul, il est préférable de ne manipuler que des inégalités $<$ ou $\leqslant$.

On rappelle les règles usuelles de calcul sur les inégalités :

- addition membre à membre de deux inégalités de même sens ;
- multiplication par $\lambda > 0$ des deux membres d'une inégalité sans en changer le sens (c'est la croissance de l'application $x \mapsto \lambda x$), et renversement du sens de l'inégalité si $\lambda < 0$
- le passage à l'inverse renverse le sens d'une inégalité où les deux membres sont strictement positifs (c'est la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$)
- multiplication membre à membre de deux inégalités de même sens entre nombres strictement positifs.

Exercice 44. Encadrer $a+b$, ab et $\dfrac{a}{b}$ sachant que :

1. $3,2 < a < 3,3$ et $1,6 < b < 1,7$
2. $-3,3 < a < -3,2$ et $1,6 < b < 1,7$
3. $-3,3 < a < -3,2$ et $-1,7 < b < -1,6$

Réponse : voir page 50

Exercice 45. On se fixe $x \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$.
Encadrer alors $f(x) = x^2 \quad g(x) = x^2+x+3 \quad h(x) = -x^2+x+1$ par deux méthodes différentes.
Indication : voir page 44

Exercice 46. Vérifier que $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$ pour tout réel x différent de -1.
En déduire que pour tout réel $x > -\dfrac{1}{2}$ on a : $\left|\dfrac{1}{1+x} - (1-x)\right| \leqslant 2x^2$

Exercice 47. On fixe deux entiers naturels a et b tels que $a \leqslant b$ et $b \neq 0$. Etablir que :

$$\frac{a}{b+1} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{a+1}{b+1}$$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 50

Exercice 48. On fixe deux entiers naturels a et b supérieurs à 2 ; comparer les nombres rationnels :

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{a+1}{b+1} \qquad \frac{a-1}{b-1}$$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 50

Exercice 49. On donne quatre réels a, b, a' et b' avec a et a' entre 1 et 2, et b et b' entre -3 et -2. Encadrer $\dfrac{a+b}{a'b'}$.
Réponse : voir page 50

Exercice 50. Démontrer que pour tous réels positifs x et y, $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
Indication : voir page 44

Réponse : voir page 51

Exercice 51. Soient (a, b, c, x, y) des réels positifs, $\lambda > 0$. Démontrer les inégalités suivantes :

$$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} \quad (1) \qquad 2xy \leqslant \frac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2 \quad (2) \qquad .(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant \sqrt{8}abc \quad (3)$$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 51

Exercice 52. Soient a, b, c trois réels.

1. Démontrer que $a(1-a) \leqslant \frac{1}{4}$.
2. Démontrer que $a+b \leqslant a^2+b^2+\frac{1}{2}$.
3. On suppose que a, b et c sont dans $[0,1]$. Démontrer que, parmi les trois nombres $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$, l'un est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 51

Exercice 53. Soient a, b, c trois réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 51

Exercice 54. Montrer les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a > 0\ ,\ (1+a)^n \geqslant 1+an$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 2^n \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$.

Indication : voir page 44

Réponse : voir page 51

Exercice 55. On fixe un réel x. Démontrer successivement les deux inégalités suivantes, ou au moins la meilleure des deux

1. $\frac{2}{3} \leqslant \frac{3+\cos x}{2+\cos x} \leqslant 4$
2. $\frac{4}{3} \leqslant \frac{3+\cos x}{2+\cos x} \leqslant 2$

Réponse : voir page 52

4 Analyse (II)

On entre ici dans le dur de l'Analyse avec les fonctions usuelles.
Objectif : créer des automatismes sur les fonctions usuelles, ce qui n'est possible qu'à coup d'entraînement répétitif : faire et refaire les calculs avec les fonctions usuelles jusqu'à pouvoir utiliser sans hésitation leur ensemble de définiition, leur monotonie, leurs règles de calcul, et surtout le best-of des prépas : Le Formulaire De Trignométrie avec utilisation du cercle trigonométrique.

4.1 Logarithmes et exponentielles

Une section **à faire et refaire**, tant que vous ne maîtrisez pas sans la moindre hésitation les règles de transformation d'une somme en produit ou d'un produit en somme par les fonctions logarithme et exponentielle.

Il n'est pas question de donner ici les constructions des fonctions exponentielle et logarithme, qui feront l'objet d'un chapitre de cours, mais seulement de rappeler les principales règles de calcul :

- La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie pour tous réels a et b **strictement positifs** :
$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0$$
d'où $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Ecrire $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ exige d'avoir $x > 0$ et $y > 0$.

- la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\boxed{\exp(a+b) = \exp a \exp b}$ pour tous réels a et b. On note usuellement $\boxed{\exp a = \mathrm{e}^a}$ où $\boxed{\ln \mathrm{e} = 1}$.

Enfin pour tout réel x **strictement positif** et pour tout entier relatif (et même tout réel) α on a

$$\boxed{\exp(\ln x) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln x^\alpha = \alpha \ln x}$$

Exercice 56. Calculer les nombres suivants

1. en fonction de $\ln 2$:
$$\ln 16 \quad \ln 512 \quad \ln 0.125 \quad \frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8} \quad \ln 72 - 2\ln 3$$
2. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
$$\ln 36 \quad \ln\frac{1}{12} \quad \ln 2.25 \quad \ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0.875$$
3. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:
$$\ln 500 \quad \ln\frac{16}{25} \quad \ln 6.25 \quad \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$$

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 52

Exercice 57. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire que $\dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

Indication : voir page 45

Exercice 58. Calculer y sachant que
$$\ln y = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$$

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 53

Exercice 59. Simplifier
$$A = \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right) \qquad B = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Réponse : voir page 53

Exercice 60. Simplifier les nombres suivants
$$\mathrm{e}^{3\ln 2} \qquad \ln(\sqrt{e}) \qquad \ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}) \qquad \mathrm{e}^{-2\ln 3} \qquad \ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) \qquad \ln(\sqrt[5]{\mathrm{e}})$$

Réponse : voir page 53

Exercice 61. Montrer que les fonctions suivantes sont impaires :
$$f : x \mapsto \ln\frac{2016+x}{2016-x} \qquad g : x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad h : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$
On n'oubliera pas de vérifier que leur ensemble de définition est centré en 0 !

Exercice 62. Résoudre les équations suivantes :
$$\begin{array}{lrcl} (a) & \ln(-x-5) & = & \ln(x-61) - \ln(x+7) \\ (b) & \ln(-x-5) & = & \ln\dfrac{x-61}{x+7} \end{array}$$

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 53

Exercice 63. Simplifier

$a = \mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 2}$ $\qquad b = -\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}}$ $\qquad c = \mathrm{e}^{-\ln\ln 2}$ $\qquad d = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$

$f = \ln(\sqrt{\mathrm{e}^4}) - \ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ $\qquad g = \ln\left(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\right)$ $\qquad h = \exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$

Réponse : voir page 53

Exercice 64. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$.

Questions subsidiaires : déterminer la parité de cette fonction et en calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Réponse : voir page 53

Exercice 65. Simplifier pour x non nul l'expression $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}|\ln(x^2)|}$

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 53

Exercice 66. Résoudre les inéquations suivantes :

(1)	$\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$	$1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$	(2)
(3)	$\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$	$\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$	(4)

Réponse : voir page 53

4.2 Trigonométrie

Toutes les formules de ce paragraphe sont à savoir sur le bout des doigts, c'est encore une section **à faire et refaire** au cours de l'été pour simplifier sans hésiter et sans erreur toute expression trigonométrique du type $\sin(3\pi/2 + \alpha)$

Là encore, pas question de faire ici un cours complet sur les fonctions trigonométriques cos, sin, tan, seulement de brefs rappels [2] :

- la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique
  c'est-à-dire que pour tout réel x, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
  et impaire c'est-à-dire que pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- la fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique et paire c'est-à-dire que pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$;
- la fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$; elle est π-périodique c'est-à-dire ? et impaire.

Première formule : $\boxed{\cos^2 + \sin^2 = 1}$

Exercice 67. Faire l'étude de la fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$:
domaine de définition, parité, périodicité, limites aux bornes de l'ensemble de définition ; dérivabilité, exprimer sa dérivée de deux façons différentes ; tableau de variation et graphe.

Exprimer simplement $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ pour tout réel non nul $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Réponse : voir page 53

Première série de formules pour un réel a quelconque [3] :

2. et une invitation très ferme à aller revoir vos cours de lycée sur la question
3. Formules à connaître par cœur et, pour les deux premières colonnes, à voir sur le cercle trigonométrique... vous trouverez sur internet

$\cos(-a)$	$=$	$\cos a$	$\sin(-a)$	$=$	$-\sin a$	$\tan(-a)$	$=$	$-\tan a$
$\cos(\pi - a)$	$=$	$-\cos a$	$\sin(\pi - a)$	$=$	$\sin a$	$\tan(\pi - a)$	$=$	$-\tan a$
$\cos(\pi + a)$	$=$	$-\cos a$	$\sin(\pi + a)$	$=$	$-\sin a$	$\tan(\pi + a)$	$=$	$\tan a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$	$=$	$\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$	$=$	$\cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$	$=$	$\frac{1}{\tan a}$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$	$=$	$-\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$	$=$	$\cos a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$	$=$	$-\frac{1}{\tan a}$

Résolution d'équations trigonométriques.

a est un réel donné.

$\sin x = \sin a \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.
$\cos x = \cos a \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$.
$\tan x = \tan a \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + k\pi$.

Exemple : résoudre l'équation $\sin 3x = \sin x$

$$\begin{aligned} \sin 3x = \sin x &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = x + 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi - x + 2k\pi \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = 2k\pi \text{ ou } 4x = \pi + 2k\pi \\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 68. Résoudre les équations suivantes

(1)	$\sin x = \sin(\pi - 3x)$	(2)	$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$
(3)	$\cos 2x + \cos \frac{x}{2} = 0$	(4)	$\tan x = \tan(\frac{\pi}{2} + x)$
(5)	$\cos(\frac{7\pi}{5} - x) = \cos(\frac{2\pi}{5} + 3x)$	(6)	$\tan(x - \frac{\pi}{4}) + \tan 3x = 0$
(7)	$\cos x = \sin \frac{7x}{5}$	(8)	$\cos 4x = \sin 7x$
(9)	$\sin(\frac{5\pi}{2} - x) + \cos 2x = 0$		
(10)	$\sin 2x + \cos 3x = 0$	(11)	$\tan 3x = \tan 5x$

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 53

Formulaire[4]

$$
\begin{array}{|lcl|lcl|}
\hline
\cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a\sin b & \cos(a-b) & = & \cos a\cos b + \sin a\sin b \\
\sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \cos a\sin b & \sin(a-b) & = & \sin a\cos b - \cos a\sin b \\
\tan(a+b) & = & \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} & \tan(a-b) & = & \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b} \\
\hline
\end{array}
$$

Exercice 69. Démontrer les formules sur la tangente d'une somme.

Formules de duplication[5]

$$
\begin{array}{|lcl|}
\hline
\cos(2a) & = & \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\
\sin(2a) & = & 2\cos a\sin a \\
\hline
\end{array}
$$

Valeurs remarquables[6]

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

X : non défini, attention !

Exercice 70. Résoudre les systèmes suivants :

$$
(S_1)\left\{\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{array}\right.
$$

Réponse : voir page 54

Exercice 71. En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}, \sin\dfrac{5\pi}{12}, \tan\dfrac{5\pi}{12}$.

Réponse : voir page 54

Exercice 72. Simplifier $\dfrac{\sin 2a}{\sin a} - \dfrac{\cos 2a}{\cos a}$.

Réponse : voir page 54

Exercice 73. Calculer $\sin(x + \dfrac{\pi}{4})$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$; en déduire la résolution des équations $\sin x + \cos x = 1$ puis $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Réponse : voir page 54

Exercice 74. Calculer $\cos \dfrac{\pi}{8}$ en montrant qu'il est racine de l'équation $4x^2 = 2 + \sqrt{2}$.

Réponse : voir page 54

Exercice 75. Résoudre le système d'inconnue réelle $x \in [0, 2\pi]$ suivant : $\left\{ \begin{array}{rcl} 2\cos x & \geqslant & 1 \\ \tan x & \geqslant & 0 \end{array} \right.$

Réponse : voir page 54

Exercice 76. Résoudre $16 \sin^4(x + \dfrac{\pi}{10}) \geqslant 1$ d'inconnue réelle $x \in [-\pi, \pi]$.

Réponse : voir page 54

Exercice 77.

1. On considère x un réel. Exprimer à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions suivantes :
   (a) $A = \cos(-x - 100\pi)$;
   (b) $B = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right)$;
   (c) $C = \sin\left(-\dfrac{7\pi}{2} - x\right)$;
   (d) $D = \cos\left(\dfrac{9\pi}{6} + x\right)$;
   (e) $E = \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$;
   (f) $F = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(\pi - x)$.
2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $(A) : \sin(x) = \sin(\pi - 3x)$;
   (b) $(B) : \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$;
   (c) $(C) : \cos(2x) + \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$;
   (d) $(D) : \cos(x) = \sin\left(\dfrac{7x}{5}\right)$.
3. Déterminer $\cos(a)$ sachant que a est un réel vérifiant $\sin(a) = -\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant 0$.

Réponse : voir page 54

5 Nombres complexes

Experts, vous avez dit experts ?...
Les nombres complexes sont utilisés en Physique, et forment une part importante du monde mathématique. Cette section comprend une part d'entraînement systématique en calcul : forme algébrique et forme trigonométrique, nombres complexes de module 1, trigonométrie ; et un Vrai/Faux plus conceptuel, à méditer.

Formulaire

Soient z et z' deux nombres complexes.
Alors $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\quad \overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
$|z| = \sqrt{z.\overline{z}}$ ou encore $|z|^2 = z.\overline{z}$
si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ et $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z.\overline{z'}}{|z'^2|}$
pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$, et extension aux entiers négatifs si $z \neq 0$

Exercice 78. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$a = (3+4i)(4-3i)$; $\quad b = (3-i)^2$; $\quad c = (2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$;

$d = \dfrac{2}{1+i}$; $\quad e = \dfrac{1}{3-i\sqrt{2}}$; $\quad f = \dfrac{1}{i\sqrt{2}-1}$;

$g = \dfrac{2-5i}{3+2i}$; $\quad h = \dfrac{6+3i}{1-2i}$; $\quad k = \dfrac{3i}{3+4i}$

$l = \dfrac{2}{1-2i} + \dfrac{3}{2+i}$; $\quad m = 2i - \dfrac{3}{i-3}$

Réponse : voir page 55

Exercice 79. Ecrire en fonction du conjugué $\overline{z}$ de z le conjugué du nombre complexe Z :
$Z = -2i + 3z$; $\quad Z = 3 + i - 2iz$; $\quad Z = (2-iz)(2z-4+3i)$; $\quad Z = \dfrac{2i+1-iz}{5i+2z}$

Réponse : voir page 55

Nombres complexes de module 1

Ici α et α' désignent des nombres réels et n un entier naturel.

D'abord la définition : $\boxed{\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha}$
Puis un formulaire :

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\alpha}\times\mathrm{e}^{i\alpha'} = \mathrm{e}^{i(\alpha+\alpha')} \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^{i\alpha}} = \mathrm{e}^{-i\alpha} = \overline{\mathrm{e}^{i\alpha}} \qquad (\mathrm{e}^{i\alpha})^n = \mathrm{e}^{in\alpha} \qquad \frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{\mathrm{e}^{i\alpha'}} = \mathrm{e}^{i(\alpha-\alpha')}}$$

Exercice 80. Placer le nombre $\mathrm{e}^{i\alpha}$ dans le plan complexe ainsi que son conjugué. Démontrer les deux premières formules de l'encadré en utilisant la définition de $\mathrm{e}^{i\alpha}$ et les formules de trigonométrie donnant le cosinus d'une somme.

Réponse : voir page 55

Exercice 81. Mettre sous forme algébrique, placer sur un cercle trigonométrique et écrire sous forme trigonométrique $\mathrm{e}^{i\alpha}$ les nombres suivants :

$$a = \mathrm{e}^{0\mathrm{i}\pi} \quad b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad c = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} \quad d = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \quad f = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi} \quad g = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$
$$h = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \quad j = -\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \quad k = i\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \quad l = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \quad m = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ne pas hésiter à poursuivre l'exercice...

Réponse : voir page 55

Exercice 82. Soit z un complexe de forme trigonométrique $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Donner la forme trigonométrique des complexes suivants :

$$\bar{z} \quad -z \quad \frac{1}{z} \quad \frac{1}{\bar{z}} \quad z^2 \quad iz \quad (1-i)\bar{z} \quad z-\bar{z} \quad |z|+z \quad 1+z+z^2$$

Exercice 83. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$. Calculer ω^5. Montrer que $\mathrm{e}^{-i\frac{6\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$.
Calculer $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7, \omega^8, \omega^9, \ldots$ et remarquer que ω n'a que 5 puissances distinctes.
Que vaut ω^{2016} ?
Calculer de même $\omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-3}, \omega^{-4}, \omega^{-5}, \omega^{-6}, \ldots$.

Réponse : voir page 55

Exercice 84. Même exercice avec $\omega' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$.

Exercice 85. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que $j^3 = 1$ puis que $1 + j + j^2 = 0$.

2. Résoudre l'équation $z^2 - z + 1 = 0$: on notera z_1 et z_2 les solutions, z_1 désignant celle dont la partie imaginaire est positive.
   Montrer que $z_1 - 1 = j$ et $z_2 - 1 = j^2$, en déduire que pour tout entier naturel n, z_1 et z_2 sont solutions de $(z-1)^{n+2} + z^{2n+1} = 0$.
3. Montrer que $(1+j)^3 + (1+j^2)^3 = -2$.

Réponse : voir page 55

Exercice 86.

1. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Calculer $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.
2. En déduire la valeur de $1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.
3. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2$ et
$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$
4. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Réponse : voir page 56

Exercice 87. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 57

Exercice 88. On considère l'ensemble $\Lambda = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad n = a^2 + b^2\}$. Montrer qu'il est stable par multiplication. Est-il stable par addition ?

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 57

Exercice 89. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{1}{2}(i - n i^n - (n+1) i^{n+1})$.

En déduire $S_1 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (2k+1)$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (2k)$.

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 57

Vrai/faux

1. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Si $|z| = 1$ et $|z + z'| = 1$ alors $z' = 0$.
2. Aucun nombre complexe n'est égal à sa partie imaginaire.
3. Pour tout couple $(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ on a $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \,\mathrm{Im}\, z$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$ ont même argument.

5. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, et θ (resp.θ') un argument de $\bar{z}$ (resp. $\dfrac{1}{z}$). Alors $\theta = \theta'$.
6. Soit z_0 un nombre complexe non réel. Alors pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = a + bz_0$.
7. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a : $|1 + iz| = \sqrt{1 + |z^2|}$
8. Pour tout couple (z, z') de nombres complexes on a : $||z'| - |z|| \leqslant |z' - z|$

6 Systèmes et Géométrie

Cette section vise à développer une intuition sur la résolution de petits systèmes linéaire : deux équations, trois inconnues par exemple, en passant par une interprétation géométrique. Les calculs et les résultats en eux-mêmes n'ont pas d'intérêt, ce qui est important, c'est que **vous réfléchissiez** aux traductions géométriques des calculs que vous faites.

6.1 Géométrie plane

Une droite affine $\mathcal{D}$ est définie par un point A et un vecteur directeur non nul $\vec{u}$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \;\; \vec{AM} = \lambda \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \;\; \left\{ \begin{array}{l} x_M = x_A + \lambda x_u \\ y_M = y_A + \lambda y_u \end{array} \right. \end{aligned}$$

ce que l'on écrira par convention

$$M \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \;\; M = A + \lambda \vec{u}$$

d'où finalement l'écriture $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{u}$.

THÉORÈME (1) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$. L'ensemble des points de coordonnées (x, y) dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite affine ; on dit que c'est la droite d'*équation cartésienne* $ax + by + c = 0$.
La droite est alors dirigée par le vecteur de coordonnées $(-b, a)$.
(2) Réciproquement, toute droite affine admet une équation cartésienne du type précédent.

Remarques :

- *il n'y a pas unicité du couple $A, \vec{u}$: dans l'écriture $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{u}$ on peut remplacer le point A par n'importe quel point de la droite, et le vecteur $\vec{u}$ par n'importe quel vecteur non nul qui lui est colinéaire.*
- *deux équations cartésiennes d'une même droite sont proportionnelles ;*
- *condition de parallélisme de deux droites : elles admettent un même vecteur directeur.*

Exercice 90. Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(a, 0)$ et $B(0, b)$ où a et b sont deux réels non nuls.

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 57

Exercice 91. On considère l'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient : il existe un réel t tel que $\left\{\begin{array}{l} x=3+2t \\ y=1-t \end{array}\right.$

Pour répondre aux questions suivantes, on raisonnera en cherchant une solution t qui vérifie les deux équations voulues.

1. Le point $A(3,1)$ appartient-il appartient-il à $\mathcal{D}$? Préciser éventuellement une valeur de t convenable.
2. Même question pour le point de coordonnées $(1,1)$.
3. Même question pour le point de coordonnées $(1,2)$.
4. Cas général : déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (x,y) pour que le point de coordonnées (x,y) appartienne à $\mathcal{D}$, et préciser dans ce cas une valeur de t convenable.

On a donc par trois fois résolu un système de deux équations à une seule inconnnue.

5. Vérifier que $\mathcal{D}$ est une droite ; en donner une écriture de la forme $\mathcal{D}=A+\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u}$ en est un vecteur directeur, et en déterminer une équation cartésienne.

Réponse : voir page 57

Pour chacun des exercices suivants, on commencera par interpréter géométriquement les calculs demandés, par exemple déterminer si un point appartient à une droite, chercher l'intersection de deux droites etc.

Exercice 92. Résoudre par équivalence les systèmes suivants, d'inconnue t, et où a et b sont des paramètres :

(1) $\left\{\begin{array}{rcl} 2t+1 &=& 3 \\ t+2 &=& 4 \end{array}\right.$ (2) $\left\{\begin{array}{r} 3t-1=a \\ t+2=b \end{array}\right.$ (3) $\left\{\begin{array}{rcl} t-1 &=& a \\ 2t-2 &=& b \end{array}\right.$

Réponse : voir page 57

Exercice 93. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a,b pour que les systèmes suivants admettent une solution

(1) $\left\{\begin{array}{rcl} 2t+1 &=& 3 \\ t+2 &=& b \end{array}\right.$ (2) $\left\{\begin{array}{r} 3t-1=a \\ t+2=b \end{array}\right.$ (3) $\left\{\begin{array}{rcl} t-1 &=& a \\ 2t-2 &=& b \end{array}\right.$

Réponse : voir page 57

Exercice 94. Résoudre par équivalence les systèmes suivants, d'inconnues x,y, et où m est un paramètre :

(1) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& 3 \\ x+2y &=& 6 \end{array}\right.$ (2) $\left\{\begin{array}{r} 3x-y=1 \\ 6x-2y=2 \end{array}\right.$ (3) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& 5 \\ 4x+6y &=& m \end{array}\right.$ (4) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y &=& 1 \\ x-2y &=& m \end{array}\right.$

(5) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+my &=& 3 \\ x-y &=& 5 \end{array}\right.$

Réponse : voir page 57

6.2 Géométrie dans l'espace

Avec les mêmes conventions que ci-dessus une droite $\mathcal{D}$ est définie par un point A et un vecteur directeur non nul $\vec{u}$, ce que l'on écrit $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{u}$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad A\vec{M} = \lambda \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x_M = x_A + \lambda x_u \\ y_M = y_A + \lambda y_u \\ z_M = z_A + \lambda z_u \end{cases} \end{aligned}$$

Cela s'appelle une description paramétrique de $\mathcal{D}$.

Remarque : là encore il n'y a pas unicité du couple $(A, \vec{u})$ *qui permet de définir la droite* $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\vec{u}$.

Exercice 95. On considère l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées vérifient : il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Pour répondre aux questions suivantes, on raisonnera en cherchant une solution t qui vérifie les trois équations voulues.

1. Vérifier que le point de coordonnées $(0, 1, 1)$ appartient à $\mathcal{D}$ et préciser la valeur de t convenable.
2. Le point de coordonnées $(2, 0, 2)$ appartient-il appartient-il à $\mathcal{D}$? Préciser éventuellement une valeur de t convenable.
3. Même question pour le point de coordonnées $(2, 1, 1)$.
4. Vérifier que $\mathcal{D}$ est une droite ; en donner une écriture de la forme $\mathcal{D} = A + \vec{u}$ où $\vec{u}$ en est un vecteur directeur.
5. Cas général.
   (a) Montrer que si le point de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{D}$ alors $y+z = 2$ et $x+2y = 1$.
   (b) Réciproquement, montrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des deux plans d'équations respectives $\mathcal{P}_1 : y + z = 2$ et $\mathcal{P}_2 : x + 2y = 1$

Réponse : voir page 58

Un plan affine $\mathcal{P}$ est définie par un point A et deux vecteurs directeurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x_M = x_A + \lambda x_u + \mu x_v \\ y_M = y_A + \lambda y_u + \mu y_v \\ z_M = z_A + \lambda z_u + \mu z_v \end{cases} \end{aligned}$$

ce que l'on écrira par convention $\boxed{M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad M = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}}$ d'où finalement l'écriture $\boxed{\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}}$.

Questions. A quoi ressemble un plan dirigé par les vecteurs $\vec{i}(1, 0, 0)$ et $\vec{j}(0, 1, 0)$? et par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}(0, 0, 1)$? et par les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$?

Exercice 96. On se donne $\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(1,0,1)$ et on s'intéresse au plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1,0,-1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. En résolvant un système de trois équations à deux inconnues dire si les points suivants appartiennent ou non au plan : $B(3,2,3)$ $\quad C(1,-1,0)$
2. En résolvant un système de trois équations à deux inconnues déterminer toutes les valeurs du paramètre m pour lesquelles le point $D(2,0,m)$ appartient à ce plan.
3. Cas général :
   (a) Montrer que si le point de coordonnées (x,y,z) appartient à $\mathcal{P}$ alors $x+y-z=2$.
   (b) Montrer réciproquement que si $x+y-z=2$ alors le point de coordonnées $M(x,y,z)$ appartient au plan.

Réponse : voir page 58

THÉORÈME (1) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. L'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) dont les coordonnées vérifient $ax+by+cz=d$ est un plan affine ; on dit que c'est le plan d'*équation cartésienne* $ax+by+cz=d$. (2) Réciproquement, tout plan affine admet une équation cartésienne du type précédent.

Remarque :

- *deux équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnelles ;*
- *pour le plan ci-dessus, le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est normal au plan ;*
- *deux plans sont parallèles si et seulement si ils admettent un même vecteur normal.*

Exercice 97. (questions indépendantes)

1. Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x+2y=3$? En donner un point et un système de vecteurs directeurs.
2. Déterminer tous les vecteurs $\vec{n}(x,y,z)$ normaux à $\vec{u}(1,2,3)$ et $\vec{v}(1,0,1)$ en résolvant un système de deux équations à trois inconnues. Combien y en a-t-il ? Exprimer les solutions de façon simple. En déduire une équation cartésienne du plan passant par $A(1,0,-1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+2y-3z=4$. Déterminer un point A de ce plan, et déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\mathcal{P} = A + \mathbb{R}\vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$.

Réponse : voir page 58

Remarques.

1. *L'intersection de deux plans non parallèles est une droite.*
2. *Toute droite peut être décrite comme l'intersection de deux plans, ce qui fournit un système de deux équations cartésiennes pour cette droite.*

Exercice 98. On considère le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x-z=3$ et le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x+3y+z=3$.

1. Vérifier que ces deux plans ont bien une droite d'intersection.
2. Montrer qu'il existe un seul point A de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ dont l'ordonnée est nulle.
3. On fixe un réel y. Résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcl} x-z & = & 3 \\ 2x+z & = & 3-3y \end{array} \right.$.

4. Montrer l'équivalence $M(x, y, z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 2 - y \\ y & = & y \\ z & = & -1 - y \end{array} \right.$
5. En déduire une description paramétrique de l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Réponse : voir page 58

On s'intéresse maintenant à l'intersection de 3 plans dans l'espace.

Exercice 99. Résoudre les systèmes suivants et interpréter géométriquement les résultats trouvés :

$a) \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y - z & = & 1 \\ 3x + 3y - z & = & 2 \\ 2x + 4y & = & 2 \end{array} \right.$

$b) \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y - z & = & 1 \\ 3x + 3y - z & = & 2 \\ 5x - 4y - 2z & = & 3 \end{array} \right.$

$c) \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y - z & = & 1 \\ 3x + 3y - z & = & 2 \\ 5x + 4y - 2z & = & 4 \end{array} \right.$

Réponse : voir page 58

Arrivés là normalement vous devriez être en mesure de compléter le tableau suivant :

nb d'inconnues	nb d'équations	interprétation géométrique éventuelle	ce qu'on s'attend à trouver comme ensemble de solutions
1	1		
1	2		
2	1		
2	2		
2	3		
3	1		
3	2		
3	3		
3	4		

7 Analyse (III)

On finit avec de nouveau de l'Analyse : calculs de limites, dériver et intégrer.
Objectif : apprendre à factoriser pour lever une forme indéterminée dans un calcul de limites ; appliquer les formules de calcul des dérivées correctement notamment pour la composée ; s'entraîner à reconnaître les primitives usuelles.

7.1 Calculs de limites

Rappel.

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
Si f est une fonction bornée et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0$

Résultats : ces résultats à savoir par cœur permettent de lever des indéterminations

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x)=0$$

Exercice 100. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$a : x\mapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ $\quad b : x\mapsto \dfrac{x+7}{4x+3}$ $\quad c : x\mapsto \dfrac{x^2+5}{x^3-1}$ $\quad d : x\mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

$e : x\mapsto \cos(x^2)\mathrm{e}^{-x}$ $\quad f : x\mapsto \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ $\quad g : x\mapsto (2+\sin x)x$

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 58

Une technique essentielle pour calculer une limite est de **mettre en facteur le terme prépondérant**.

Exemple. Déterminer la limite en $+\infty$ de $F(x)=\dfrac{x^5-4x^4+2x^2-30}{x^3+5x-4}$.

Au numérateur $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$ etc. Mais de tous les termes du numérateur le terme prépondérant (c'est-à-dire celui qui croît le plus vite vers $+\infty$) est le terme en x^5. En faisant une remarque similaire pour le dénominateur, on est donc amené à écrire :

$F(x)=\dfrac{x^5(1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{30}{x^5})}{x^3(1+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3})}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

Exercice 101. Utiliser cette technique pour déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes

- $g_1(x)=\dfrac{x+3}{2-x}$
- $g_2(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$
- $g_3(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-x^2+x-1}$
- $g_4(x)=\dfrac{x+\ln(x)}{2x-\ln(x)}$
- $g_5(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^x-x}{\mathrm{e}^x+1}$

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 58

Exercice 102. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \dfrac{x^2 + x^3 + 3\ln x + \mathrm{e}^{-x}}{x^4 + \cos x - 1}$
- $f_2(x) = \dfrac{50x + x\ln x}{x\ln x + 3}$
- $f_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \sqrt{x} + \mathrm{e}^{x} + \cos x}{x^{20} + 2x^{2013}}$
- $f_4(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$
- $f_5(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x^6 + 2\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x/2}}$
- $f_6(x) = \mathrm{e}^{-3\sqrt{x} + x - \ln(x^2+1) + \cos x}$
- $f_7(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
- $f_8(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} + 1) - 2x$

Indication : voir page 45

Réponse : voir page 58

7.2 Dérivées

Dériver ou intégrer, ne vous trompez pas de sens !

Pour u et v deux fonctions dérivables :

Fonction	Dérivée	Observations
$u+v$	$u'+v'$	
λu	$\lambda u'$	λ est un réel
uv	$uv'+u'v$	
u^n avec $n \in \mathbb{Z}$	$nu^{n-1}u'$	u ne s'annule pas si $n \in \mathbb{Z}_-$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas !
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas !
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	
$\ln$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	
$f \circ g = f(g)$	$f' \circ g \times g'$	bien justifier la dérivabilité de la composée...
$\ln\lvert f\rvert$	$\dfrac{f'}{f}$	f ne s'annule pas
u^α avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u^{\alpha-1}u'$	$u>0$
$\sqrt{\cdot}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\cdot}}$	$\sqrt{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
$\sin$	$\cos$	
$\cos$	$-\sin$	
$\tan$	$1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$	

Exemple : dériver la fonction $F : x \mapsto \sqrt{x-1}$.

- la fonction $g : x \mapsto x - 1$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$ on a $x - 1 > 0$.
- la fonction $f : y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $F = f \circ g$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée et pour $x \in]1, +\infty[$ on a
$$F'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Exercice 103. Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée des les fonctions suivantes ; mettre le résultat sous une forme propice à une éventuelle étude de signe

$f_1 : x \mapsto (x-1)^3$	$f_2 : x \mapsto (x^2-1)^3$	$f_3 : x \mapsto 3x^2 - 6x + 1$
$f_4 : x \mapsto (x-1)(x-2)$	$f_5 : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3}$	$f_6 : x \mapsto \dfrac{3-x}{2+x}$
$f_7 : x \mapsto \dfrac{3x+1}{1-x}$	$f_8 : x \mapsto 3x^2 - \dfrac{1}{x}$	$f_9 : x \mapsto (x-2)(3-x)(x-4)$
$g_1 : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{-x+2}$	$g_2 : x \mapsto \dfrac{x^2-2x+3}{x^2-x+2}$	$g_3 : x \mapsto \sqrt{2x-3}$
$g_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+5}$	$g_5 : x \mapsto \sqrt[5]{x^2+1}$	$g_6 : x \mapsto \dfrac{1}{-x+2}$
$g_7 : x \mapsto \cos(2x - \dfrac{\pi}{3})$	$g_8 : x \mapsto \sin(\dfrac{\pi}{6} - 2x)$	$g_9 : x \mapsto \sin 2x \cos x$
$h_1 : x \mapsto 6\cos^2 x - 6\cos x - 9$	$h_2 : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+\cos^2 x}$	$h_3 : x \mapsto 2\sin x \cos + \sin x + \cos x$
$h_4 : x \mapsto \dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}$	$h_5 : x \mapsto \ln(5x-1)$	$h_6 : x \mapsto \ln(x^2+1)$
$h_7 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$	$h_8 : x \mapsto \ln \ln x$	$h_9 : x \mapsto \ln\lvert 7-2x \rvert$
$u_1 : x \mapsto x\ln x - x$	$u_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$	$u_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2-x+1}$
$u_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$	$u_5 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$	$u_6 : x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln x}$
$u_7 : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$u_8 : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1)$	$u_9 : x \mapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$
$v_1 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$	$v_2 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	
$v_3 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$	$v_4 : x \mapsto \tan 2x$	

Réponse : voir page 58

Exercice 104. Justifier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$	$\ldots$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4}$	$\ldots$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1}$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3}$	$f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4}$	$\ldots$

etc. en utilisant la formule donnant la dérivée de u^α ***et pas celle de la dérivée de*** $\dfrac{1}{u}$.

Réponse : voir page 59

7.3 Primitives

7.4 Reconnaissance de la dérivée d'une fonction composée.

Pour u et v deux fonctions continues donc admettant des primitives U et V on a :

Fonction	Primitives	Observations
$u+v$	$U+V+\text{cte}$	
λu	$\lambda U+\text{cte}$	λ est un réel
$(g'\circ u)\times u'$	$g\circ u+\text{cte}$	
$u'e^u$	$e^u+\text{cte}$	
$u'u^n$ avec $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+\text{cte}$	si $n\in\mathbb{Z}_-^*$: u ne s'annule pas.
$u^\alpha u'$ avec $\alpha\neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+\text{cte}$	$u>0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+\text{cte}$	u ne s'annule pas
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)+\text{cte}$	
$u'\cos(u)$	$\sin(u)+\text{cte}$	
$u'(1+\tan^2(u))=\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$	$\tan(u)+\text{cte}$	

où cte désigne une constante arbitraire réelle.

Exercice 105. Déterminer l'ensemble des primitives de $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 59

Exercice 106. Calculer les primitives des fonctions suivantes, puis dériver le résultat obtenu pour contrôler la réponse.

$$f_1 : x\mapsto x^{16}-35x^{13}+14x^{11}-3x^8+20x^4+56x^3+51x^2+18x+1$$

$$f_2 : x\mapsto\frac{1}{x}\qquad f_3 : x\mapsto\frac{1}{x^2}\qquad f_4 : x\mapsto\frac{1}{x^3}\qquad f_5 : x\mapsto\frac{1}{x^4}$$

$$g_1 : x\mapsto\frac{1}{1-x}\qquad g_2 : x\mapsto\frac{1}{(1-x)^2}\qquad g_3 : x\mapsto\frac{1}{(1-x)^3}\qquad g_4 : x\mapsto\frac{1}{(1-x)^4}$$

$$h_1 : x\mapsto\frac{1}{2x+1}\qquad h_2 : x\mapsto\frac{1}{(2x+1)^2}\qquad h_3 : x\mapsto\frac{1}{(2x+1)^3}\qquad h_4 : x\mapsto\frac{1}{(2x+1)^4}$$

Réponse : voir page 59

Exercice 107. Calculer une primitive des fonctions suivantes puis dériver le résultat obtenu pour contrôler la réponse :

$a)x \mapsto 4x^2 - 5x + \dfrac{1}{x^2}$	$b)x \mapsto x(2x^2+1)^4$	$c)x \mapsto (x-1)^3$
$e)x \mapsto (x^2-1)^3$	$f)x \mapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$g)x \mapsto \sqrt{x}+1$
$h)x \mapsto \sin 2x$	$i)x \mapsto \cos 3x$	$j)x \mapsto 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$k)x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x}$	$l)x \mapsto 2x(x^2-1)^5$	$m)x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+2)^2}$
$n)x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$	$o)x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$	$p)x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$
$q)x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$	$r)x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{5\mathrm{e}^x+1}$	$s)x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sqrt[3]{1+\mathrm{e}^{2x}}$
$t)x \mapsto \tan x$	$u)x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$	$v)x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
$w)x \mapsto \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$	$y)x \mapsto \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$	$z)x \mapsto -\sqrt{\mathrm{e}^x}$
$\alpha)x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$	$\beta)x \mapsto \sin x \mathrm{e}^{\cos x}$	$\gamma)x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$
$\delta)x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+2\mathrm{e}^x)^{\frac{3}{2}}}$	$\varepsilon)x \mapsto \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$	

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 60

Exercice 108. Pour la physique...

1) Dériver les fonctions suivantes :

$f_1 : t \mapsto \sin t \ \mathrm{e}^t$ $\quad f_2 : x \mapsto \cos t \ \mathrm{e}^t$ $\quad f_3 : t \mapsto \cos \omega t \ \mathrm{e}^t$ $\quad f_4 : t \mapsto \sin \omega t \ \mathrm{e}^t$

$f_5 : t \mapsto \sin t \ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad f_6 : t \mapsto \cos t \ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad f_7 : t \mapsto \cos \omega t \ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ $\quad f_8 : t \mapsto \sin \omega t \ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

2) Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{10}^{20} \frac{dv}{v} \qquad I_2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2t} dt \qquad I_3 = \int_{10^{-5}}^{10^{-2}} \frac{dp}{2p} \qquad I_4 = \int_{275}^{315} \frac{2dT}{T} \qquad I_5 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} A\cos(\omega t + \varphi) dt$$

Réponse : voir page 60

Exercice 109. Déterminer des primitives des fonctions suivantes

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^a}$ avec $a > 0$, $a \neq 1$

Réponse : voir page 60

Exercice 110. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes

1. $f(x) = (x+2)\sqrt{3x+6}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}$
3. $f(x) = \dfrac{\sin(\ln x)}{x}$
4. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$

Réponse : voir page 60

7.5 Intégrations par parties.

Exercice 111.

1. Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 te^t dt$ puis $I_1' = \displaystyle\int_0^1 t^2 e^t dt$.
2. En remarquant que $\ln(t) = 1 \times \ln(t)$, calculer $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \ln(t)dt$.
3. En effectuant deux intégrations par parties successives, et sans tourner en rond, calculer $I_3 = \displaystyle\int_0^\pi e^t \sin(t)dt$.

Réponse : voir page 61

Exercice 112. Calculer :

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^t \sin 2t dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx$
3. $\displaystyle\int_1^4 (x+3)\ln(x)dx$
4. $\displaystyle\int_0^2 t^3 e^t dt$

Réponse : voir page 61

Exercice 113. **Plus difficile** Calculer :

1. $\displaystyle\int_1^\pi (x\cos(x) + \sin(x))\ln(x)dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln(2)}} t^3 e^{t^2} dt$

Réponse : voir page 61

8 Pour finir...

Si vous êtes très motivé, il reste le calcul matriciel, le dénombrement, les probabilités et l'arithmétique pour les MPSI... Courage ! Tout ce que vous ferez avant la rentrée sera autant de gagné sur votre travail de l'année prochaine et vous permettra de vous concentrer sur les aspects vraiment intéressants des Mathématiques !

8.1 Calcul matriciel

Exercice 114. Calculer les produits suivants :
$P_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ $\quad P_2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$

Réponse : voir page 61

Exercice 115. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Montrer que $A^2 = A + 2I_3$ et en déduire que A est inversible, préciser son inverse.

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 61

Exercice 116. Calculer les produits matriciels suivants (les résultats devraient être simples).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & -12 & -4 \\ -35 & 42 & 13 \\ 44 & -52 & -16 \end{bmatrix}$$

Réponse : voir page 61

Exercice 117. Déterminer les puissances n des matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 61

Exercice 118. Soit

$$\mathcal{A} = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \; M = \begin{pmatrix} -(a+b) & b & a \\ a & -(a+b) & b \\ b & a & -(a+b) \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que si M et M' sont deux éléments de $\mathcal{A}$ alors toute matrice de la forme $\lambda M + \lambda' M'$ est encore dans $\mathcal{A}$.
2. Déterminer deux matrices A, B telles que toute matrice de $\mathcal{A}$ s'écrive comme combinaison linéaire de A et B.

3. Calculer A^2, B^2, AB, BA. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable pour la multiplication des matrices.
4. Existe-t-il dans $\mathcal{A}$ des matrices dont l'inverse est dans $\mathcal{A}$?

Réponse : voir page 61

Exercice 119. On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $M(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x & 0 \\ x & x+1 & 0 \\ x & -x & 2x+1 \end{pmatrix}$, lorsque x décrit $\mathbb{R}$.

1. $\mathcal{A}$ est-il stable par combinaison linéaire ? c'est-à-dire si deux matrices $M(x)$ et $M(x')$ sont dans $\mathcal{A}$, est-ce que toutes les matrices qui s'écrivent $\lambda M(x) + \mu M(x')$ sont encore dans $\mathcal{A}$?
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer le produit $M(x) \times M(y)$. En déduire que $\mathcal{A}$ est stable pour le produit matriciel.
3. Existe-t-il dans $\mathcal{A}$ des matrices A vérifiant $A^2 = M(1)$?
4. Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telle que $M^n(1) = M(u_n)$.

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 62

Exercice 120. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ, QP.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a^n P + b^n Q$

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 62

8.2 Dénombrement.

Exercice 121. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 2 entrées, 3 plats et 4 desserts ?

Réponse : voir page 62

Exercice 122. En PCSI3, il y a 41 élèves qui réalise un devoir. Combien de classements possibles y-a-t-il à ce devoir

1. au total ?
2. si on sait d'avance de façon certaine que l'élève NIBUCHIT sera premier ?
3. s'il y a 15 élèves qui jouents au rugby, 26 élèves qui jouent au football, et si on sait que touts les élèves jouant au rugby sont toujours classés devant les élèves jouant au foot ?

Réponse : voir page 62

Exercice 123. On suppose $n \geqslant 2$. Une compagnie d'aviation dessert n villes. Tous les trajets entre les villes sont possibles. Combien de billets différents doit-on éditer ?

Réponse : voir page 62

Exercice 124. On suppose $n \geqslant 2$. n personnes se serrent la main. Combien de poignées de mains sont-elles échangées ?

Réponse : voir page 62

Exercice 125. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

1. Au total ?
2. composés de 5 carreaux ou 5 piques ?
3. composés de 2 carreaux et 3 piques ?
4. contenant au moins un roi ?
5. contenant au plus un roi ?
6. contenant exactement 2 rois et 3 piques ?

Réponse : voir page 62

Exercice 126. Combien y-a-t-il d'anagrammes des mots

1. "MOT" ?
2. "RIGOLO" ?
3. "ANAGRAMME" ?

Réponse : voir page 64

8.3 Probabilités

Exercice 127. Exprimer $P(A \cup B \cup C)$ en fonction des probabilités de A, B, C et de leurs intersections.

Réponse : voir page 64

Exercice 128.

1. On lance simultanément deux dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir
   (a) un double ?
   (b) une somme des deux dés égale à 9 ?
   (c) un minimum des deux dés égal à 4 ?
2. On lance cinq fois un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un nombre pair ?
3. On lance simultanément trois dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir au final un 1, un 2 et un 4, dans n'importe quel ordre, ou bien trois chiffres de même parité ?
4. On lance six fois un dé équilibré à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir chacun des numéros de 1 à 6 ?

Réponse : voir page 64

Exercice 129. On suppose que chaque enfant qui naît a 1 chance sur 2 d'être un garçon. Madame B. a 4 enfants.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ait 4 garçons, sachant que l'aîné est un garçon ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ait 4 garçons, sachant qu'elle a au moins un garçon ?

Réponse : voir page 64

Exercice 130. Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement et sans remise 4 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches puis 2 boules noires dans cet ordre ?

Réponse : voir page 65

Exercice 131. Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement 2 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage dans chacun des cas suivants ?

1. A l'issue du premier tirage, on remet la boule tirée dans l'urne avec une autre boule de la même couleur.
2. A l'issue du premier tirage, si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne, mais, si elle est blanche, on ne la remet pas dans l'urne.

Réponse : voir page 65

Exercice 132. On dispose de 3 urnes $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$ contenant chacune 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire une boule de l'urne $\mathcal{U}_1$ et une boule de l'urne $\mathcal{U}_2$, puis on les place dans l'urne $\mathcal{U}_{\ni}$. On tire alors une boule dans l'urne $\mathcal{U}_3$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules noires ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche dans $\mathcal{U}_3$?
3. On a obtenu une boule blanche dans $\mathcal{U}_3$. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule blanche dans $\mathcal{U}_1$ et une boule blanche dans $\mathcal{U}_2$?

Réponse : voir page 65

Exercice 133. Une maladie affecte une personne sur 10000. Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0,1\%$ des personnes saines testées.

1. Quelle est la probabilité que le test se trompe ?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ?

Réponse : voir page 65

Exercice 134. On lance deux dés équilibrée. On considère les événements A :"le premier dé amène un nombre pair" ; B :"le second dé amène un nombre pair" ; C :"les deux dés amènent des nombres de même parité".

1. Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants.
2. Montrer que A et $B \cap C$ ne sont pas indépendants, que A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants. On dit que A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

Réponse : voir page 65

8.4 (MPSI uniquement) Arithmétique

Exercice 135.

1. Déterminer le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de 2023^{2021}.
2. Démontrer que 11 divise $2^{123} + 2^{121} + 1$.
3. Soit n un entier naturel. Démontrer que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 65

Exercice 136.

1. Démontrer que pour tout a et b dans $\mathbb{N}$,
$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab).$$
2. Montrer que si n est un entier supérieur ou égal à 2, alors $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 65

Exercice 137.

1. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.
2. Déterminer le reste dans la division par 7 de 2021^{2022}.

Réponse : voir page 66

Exercice 138.

1. Montrer que 6 divise $n^3 + 5n$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que 30 divise $n^5 - n$ pour tout entier naturel n.

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 66

Exercice 139. Pour chacun des couples d'entiers suivants a et b, déterminer leur pgcd ainsi d qu'un couple d'entiers (u, v) tels que $au + bv = d$.

1. $a = 30$ et $b = 45$
2. $a = 20$ et $b = 63$
3. $a = 147$ et $b = 141$
4. $a = 252$ et $b = -524$

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 66

Exercice 140. Déterminer l'ensemble des solutions de $7x + 12y = 1$, d'inconnues x et y dans $\mathbb{Z}$, puis de $7x + 12y = 4$, d'inconnues x et y dans $\mathbb{Z}$.

Réponse : voir page 66

Exercice 141. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier naturel. On note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On dit que ω_k vérifie la propriété (G) si : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_k^p = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Démontrer que si ω_k vérifie la propriété (G) alors il existe p et ℓ dans $\mathbb{N}$ tel que $kp - \ell n = 1$.
2. En déduire que si ω_k vérifie la propriété (G), alors k et n sont premiers entre eux.
3. Réciproquement, si k et n sont premiers entre eux, démontrer qu'il existe u et v tels que $uk + vn = 1$ et, en calculant ω_k^u, démontrer que ω_k vérifie la propriété (G)

Indication : voir page 46

Réponse : voir page 66

Indication de l'**exercice 13** : pour C_n : rappels de cours sur les puissances dans le paragraphe 4.

Indication de l'**exercice 24** : identifier soigneusement la raison avant d'appliquer une formule :

- calculer $-B_n$
- pour C_n, la raison se voit
- pour D_n, commencer par factoriser par 5 avant de chercher la raison.

Indication de l'**exercice 27** : Pour les équations $b)c)d)e)h)k)$ chercher d'abord des racines évidentes en utilisant la somme et le produit...

Indication de l'**exercice 29** : Inutile de calculer le discriminant, utiliser plutôt les relations entre coefficients et racines. D'autre part, faire attention aux valeurs particulières de m.

Indication de l'**exercice 30** : Pas besoin de discriminant pour les équations $(2),(3),(4)$

Indication de l'**exercice 31** : Ne pas hésiter à tracer l'allure du graphe des deux premières fonctions ...

Indication de l'**exercice 32** :

- pour c) etc. : réduire au même dénominateur ;
- pour g) : on a en fait à traiter un système de deux inéquations

Indication de l'**exercice 34** : Si x_1 et x_2 sont les racines de l'équation, alors $9x_1^2 = 3x_1 + 4$, d'où $9(x_1^2 + x_2^2) = 3(x_1 + x_2) + 8$ et on conclut en utilisant que la somme des racines vaut $\dfrac{1}{3}$.

Indication de l'**exercice 37** : pour (6) et (8), surtout ne pas développer ! Pour (7) et (9), pas de Δ. Pour (10),(11), on dispose déjà des racines. Ne pas oublier de discuter en fonction de m pour (14).

Indication de l'**exercice 43** : Pour (4) : élever au carré ! et revoir cours et exercices sur les trinômes paragraphe suivant...

Indication de l'**exercice 45** : On utilisera d'abord les règles de calcul usuelles sur les inégalités ; puis onpourra étudier rapidement les fonctions f, g, h pour conclure.

Indication de l'**exercice 47** : Inutile de calculer les différences...

Indication de l'**exercice 48** : On supposera $a < b$, puis $a > b$, puis $a = b$

Indication de l'**exercice 50** : Remarquer que l'on manipule des quantités positives et tout mettre au carré.

Indication de l'**exercice 51** :

1. Développer $(a-b)^2$.
2. Se ramener à la question précédente avec de bonnes valeurs de a et b.
3. Démontrer que $(a+b)^2 \geqslant 2ab$.

Indication de l'**exercice 52** :

1. Étudier un trinôme du second degré ou une fonction.
2. Utiliser l'inégalité précédente et la possibilité de sommer les inégalités.
3. Supposer que ce n'est pas le cas et aboutir à une contradiction à l'aide de l'inégalité précédente.

Indication de l'**exercice 53** : Démontrer que $\dfrac{ab}{a+b} \leqslant \dfrac{a+b}{4}$.

Indication de l'**exercice 54** :

1. Utiliser la formule du binôme de Newton ou bien une récurrence.
2. Faire une récurrence. Pour la première inégalité on peut remarquer que $\binom{2n}{n} = \frac{2n \times (2n-1) \times \cdots \times n+1}{n \times (n-1) \times \cdots \times 1}$.

Indication de l'**exercice 56** : $0.125 = 2^{\cdots}$

Indication de l'**exercice 57** : ne pas oublier la « quantité conjuguée », et tout exprimer en fonction de $\ln(1+\sqrt{2})$.

Indication de l'**exercice 58** : se reporter à l'exercice ci-dessus pour simplifier la somme.

Indication de l'**exercice 62** : attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Indication de l'**exercice 65** : il y a quatre cas à envisager, suivant le signe de x et celui de $\ln|x|$

Indication de l'**exercice 68** :
Equation 3 : $-\cos\alpha = \cos(\alpha + \dots)$
Equation 6 : $-\tan\alpha = \tan(\dots\alpha)$
Equations 7 & 8 : $\sin\alpha = \cos(\cdots - \alpha)$

Indication de l'**exercice 87** : Mettre ce nombre sous forme trigonométrique.

Indication de l'**exercice 88** : Dans le chapitre Complexes, $a^2 + b^2$ s'interprète comme le carré d'un module !

Indication de l'**exercice 89** : Une récurrence fera l'affaire pour la formule, puis relier S_1 et iS_2 à S_{2n+1}

Indication de l'**exercice 90** : Faire un dessin... et chercher une équation de la forme $\dots x + \dots y = 1$

Indication de l'**exercice 100** :

- pour a, comparer x et $\sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$
- pour b, c factoriser numérateur et dénominateur
- pour d, e utiliser le résultat encadré
- pour f penser à la limite d'une composée...
- pour g minorer...

Indication de l'**exercice 101** : Factoriser par

- x et x
- x^2 et x^2
- e^x et e^x

Indication de l'**exercice 102** : Factoriser par

- x^3 et x^4 pour f_1
- $x \ln x$ pour f_2
- e^x et x^{2013} pour f_3
- écrire $\ln(1+x) = \ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x})$
- factoriser par e^x pour f_5
- déterminer la limite de « ce qui est dans l'exponentielle »puis conclure en utilisant la limite d'une composée
- quantité conjuguée...
- factoriser e^{2x} dans le logarithme

Indication de l'**exercice 105** : Ne pas chercher midi à quatorze heures...

Indication de l'**exercice 107** : b)c)l)m)o)s)δ) : déterminer une constante λ telle que la fonction à intégrer soit de la forme $\lambda u' u^{\cdots}$
d) : développer
g) : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
k)déterminer une constante λ telle que la fonction à intégrer soit de la forme $\lambda \dfrac{u'}{u}$
u)v) : de la forme $u' \mathrm{e}^u$

Indication de l'**exercice 115** : Factoriser par A...

Indication de l'**exercice 117** : Formaliser des récurrences

Indication de l'**exercice 119** : 1) Si un ensemble est stable par combinaison linéaire il contient nécessairement la combinaison linéaire nulle 4) attention à la question, qui demande existence et unicité de la suite $(u_n)_n$! l'existence se traite par récurrence, l'unicité par l'absurde

Indication de l'**exercice 120** : pour 3) on pourra raisonner par récurrence.

Indication de l'**exercice 135** : Il s'agit de faire des congruences, modulo 10, 11, 7.
Question 1, trouver un entier p tel que 2023^p soit congru à 1 modulo 10.

Indication de l'**exercice 136** : Pour la deuxième question, distinguer selon les cas $n \equiv 0, 1, 2, 3[4]$.

Indication de l'**exercice 138** :

1. Remarquer que 6 divise toujours $n^3 - n$, en s'intéressant à la divisibilité par 2, par 3, d'un produit de 2, de 3 entiers consécutifs.
2. Faire de même, en factorisant judicieusement $n^5 - n$. S'intéresser aussi aux congruences modulo 5.

Indication de l'**exercice 139** : Effectuer l'algorithme d'Euclide et le remonter.

Indication de l'**exercice 141** : Utiliser le fait que si $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, alors $\theta = \varphi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Tout est ensuite basé sur la relation de Bézout.

Réponse de l'**exercice 1** :
$A = \frac{32}{15}$
Réponse de l'**exercice 2** : $A = a + c; B = -2a + 3b + 5c; C = 6; D = a - 9$
Réponse de l'**exercice 3** : $A = \frac{2}{3}; B = \frac{35}{6}; C = -\frac{155}{284}$
Réponse de l'**exercice 4** : $A = -21b^3 - a^2; B == 2a^2b + 3a^2 + 2b$
Réponse de l'**exercice 5** : $A = 343x^3y^3$; $A_1 = 9x^4y^2$ $B = 32a^{10}b^{15}$; $C = a^6$; $D = -\frac{1}{2}x^3y^3$; $E = \frac{3}{35}a^4x^2y^3$; $F = -\frac{2}{5}a^2b^2x^5$; $G = 10a^2x^5y^7$
Réponse de l'**exercice 6** :
$A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{2^{n-1}}{3^n} \quad E = \frac{3}{2^3} \quad F = \frac{7}{2^8} \quad G = -7^{15} \times 11^8$
$K = a^{2n^2} \quad L = a^{n^2-n} \quad M = a^{6n} \quad P = a^{n^2}$
Réponse de l'**exercice 7** :
$A = (\mathrm{e}^x)^k \quad B = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \quad C = \mathrm{e}^2 \times (\mathrm{e}^x)^3 \quad D = (1 - \mathrm{e})\mathrm{e}^x$
$E = \mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x}$; $F = \frac{(\mathrm{e}^x)^2 + 3\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x} = \frac{(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x + 2)}{\mathrm{e}^x}$
Réponse de l'**exercice 8** : $P(x) = 5x^3 + 7x - 1$
$Q(x) = 17/12x + 5$
$R(x) = \frac{1}{3}x^2 - xy + y^2$
$S(a) = \frac{56}{15}a^2 - \frac{16}{3}a - \frac{1}{4}$
$T(x) = \frac{17}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{3}{2}$

Réponse de l'**exercice 9** :
$A + B + C = 9x^2 - 10x + 12 \qquad A - B + C = 5x^2 + 4$
$A + B - C = x^2 - 8x + 6 \qquad -A + B + C = 3x^2 - 2x + 2$
Réponse de l'**exercice 10** :
$A + B + C+ = 15a^2 - 14ab + 9b^2 \qquad A - B + C = 3a^2 + 2ab - 9b^2$
$A + B - C = 7a^2 - 8ab + 23b^2 \qquad -A + B + C = 5a^2 - 8ab - 5b^2$
Réponse de l'**exercice 11** :
$A = 4x^8 - 10x^6 + 4x^4 + 7x^3 - 14x \qquad B - 20x^5 + 15x^4 + 8x^3 - 6x^2$
$C = 21x^6 - 6x^5 - 23x^4 + 10x^3 - 20x^2 \qquad D = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 18x - 20$
$E = -25x^5 + 50x^4 + 9x^3 - 50x^2 + 16x \qquad F = 35/8x^6 - 19/2x^4 + 19/8x^3 + 4x^2 - 2x + 1/4$
$G = 3x^4 - 4x^2 + 1 \qquad H = 16x^6 + 16x^5 - 52x^4 + 12x^3 + 69x^2 - 70x + 25$
Réponse de l'**exercice 12** :
$12 \times 11 \times 10 \times 9$; 22 ; $\frac{1}{8!10}$
Réponse de l'**exercice 13** :
$A = (n + 2)(n + 3) \qquad B = \frac{1}{(n + 1)!} \qquad C_n = \frac{1}{n + 1}\frac{a}{b^2}$
Réponse de l'**exercice 14** :
$$A_n = \frac{n - 1}{n(n + 1)!} \qquad B_n = \frac{n^2 + 4n + 2}{(n + 3)!}$$

Réponse de l'**exercice 16** :

$$x=\frac{4}{3}\ (1) \qquad x=5\ (2) \qquad x=-\frac{29}{2}(3) \qquad x=\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{5}\ (4)$$

Réponse de l'**exercice 17** : $(a)2;(b)-113/43;(c)-21/5;(d)0$

Réponse de l'**exercice 18** : $(a)\{1,2,3\};(b)\{0,3\};(c)\{0,5/3\};(d)\{-9,9\};(e)\{-8/3,8/3\};$
$(f)\{0,3/4,4/3,-1/5\};(g)\{-1,1\};(h)\{-5,6/5\};(i)\{7/2,-7/2\};(j)\{-1/3,8/3,2\};$
$(k)\{0,2,-2\};(l)\{-5\}$

Réponse de l'**exercice 20** :

$A=(x-1)^2 \qquad B=(x+\frac{1}{2})^2 \qquad C=(2x-1)^2 \qquad D=(a+2)^2$
$E=4x(x+y)^2 \qquad F=3xy(x+y) \qquad G=3xy(-x+y)$
$H=(x+3y)(x^2-3xy+9y^2) \qquad K=(2a-5)(4a^2+10a+25)$

Réponse de l'**exercice 21** :

$A=x^2+8x+16=(x+4)^2 \qquad B=x^2-6ax+9a^2=(x-3a)^2$
$C=4x^2-4x+1=(2x-1)^2 \qquad D=9x^2+6x+1=(3x+1)^2$
$E=x^2+2xy^2+y^4=(x+y^2)^2 \qquad F=4a^2x^2-4ax+1=(2ax-1)^2$

Réponse de l'**exercice 22** :

$A=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) \qquad B=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$
$C=(4a-1)^2 \qquad D=(a^2-2b^2)^2$
$E=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2) \qquad F=(a+b)(a-b)(2a^2+1+2b^2)$
$G=(a-1)(a^{2n-1}+a^{2n-2}+\cdots+1) \qquad H=(a+1)(a^{2n}-a^{2n-1}+a^{2n-2}\cdots+1) \qquad M=a^{2n}-$
$J=(a-1)(a+2)(a+1) \qquad K=(a-2b)(a+2b)$
$L=(2a-b)^2 \qquad P=(a-b)^2$
$2^{2n}=(a-2)(a^{2n-1}+2a^{2n-2}+2^2a^{2n-3}+\cdots+2^{2n-1})$

Réponse de l'**exercice 23** :

$$A=a^2x-2axb+b^2x \quad B=0 \quad C=2a^3-6abc+2b^3+2c^3$$
$$D=a^2b-ca^2+b^2c-b^2a+c^2a-bc^2 \qquad E=a^2+b^2+c^2$$
$$F=a^4+b^4+c^4-a^3b-a^3c-ab^3-ac^3-b^3c-bc^3+a^2bc+ab^2c+abc^2$$

Réponse de l'**exercice 24** :

$A_n=\dfrac{3^{2n+1}-1}{2} \qquad B_n=\dfrac{(-4)^{n+1}-1}{5}$
$C_n=\dfrac{1+(-1)^n a^{2n+2}}{1+a^2} \qquad D_n=\dfrac{5}{126}((-5)^{3n+3}-1)$

Réponse de l'**exercice 25** :

$A_n=\dfrac{9}{2}(3^{n+1}-1) \qquad C_n=\dfrac{3^{n+2}(3^{n+3}-1)}{2}$
$B_n=a^2\dfrac{a^{2n}-1}{a^2-1}$ si $|a|\neq 1,\ n$ si $a=1$

Réponse de l'**exercice 27** :

$a)\frac{1}{4},\frac{1}{2}$	$b)8,2$
$c)\sqrt{2},\sqrt{8}$	$d)a,2$
$e)-1,-\pi$	$f)4\pm\sqrt{22}$
$g)-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}$	$i)x=\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$
$h)0,6$	$j)\frac{-1\pm\sqrt{5}}{26}$
$k)-3a,-a$	$l)x=\pm\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$
$m)\frac{1}{6},1$	

Attention ! Pas de calcul de discriminant pour h), i) et l) !

Réponse de l'**exercice 28** : $F_1(x)=\dfrac{x+4}{2x-3}; F_2(x)=\dfrac{2x-3}{x}$

Réponse de l'**exercice 29** : $\frac{2}{3}\quad -\frac{2}{7}$
Attention, si $m=0$, ce n'est pas une équation du second degré ! Si $m\neq 0$ alors l'autre racine est $-\dfrac{1}{m}$
Si $m\neq -3$ alors on trouve $\dfrac{2m}{m+3}$

Réponse de l'**exercice 30** :

(1)	$\frac{10}{7},5$	(2)	$0,\frac{1}{3}$
(3)	$x=\pm 7$	(4)	$-1,-7$

Réponse de l'**exercice 31** :

$$(1)\quad x\in\left]\frac{1}{3};5\right[\qquad (2)\quad x\in\left]-3;\frac{5}{2}\right[\qquad (3)\quad x\in\left[-\frac{1}{2};5\right[$$

Réponse de l'**exercice 32** :

a) toujours vrai	b)toujours vrai
c) $\left]\frac{1}{2},1\right[\cup]2,+\infty[$	d) $\left]0,\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left]2,+\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right]$
e) $]-\infty,1[\cup]1,3[\cup]4,+\infty[$	f) $[1,2]\cup[4,7]$
g) $[2,5]\cup[9,12]$	h)$]1,+\infty[$

Réponse de l'**exercice 33** : On trouve 2 racines réelles : $\pm\sqrt{5}$ et 2 complexes $\pm i$.

Réponse de l'**exercice 34** : On trouve $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{6}$ d'où $\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{17}}{6}$ et $\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{17}}{6}$.
On en déduit $\sin 2\theta=-\dfrac{8}{9}$ et $\cos 2\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{9}$

Réponse de l'**exercice 35** : Pour la première : $\ln x=-6$ ou 7
d'où $x=\mathrm{e}^{-6}$ ou e^{7}. Pour la seconde : $\ln^2 x=7$ donc $x=\mathrm{e}^{\sqrt{7}}$ ou $x=\mathrm{e}^{-\sqrt{7}}$

Réponse de l'**exercice 36** : Le signe d'un produit est le même que celui d'un quotient ! Pour la deuxième question, la réponse est non, -5 convient dans un cas et pas dans l'autre.

Réponse de l'**exercice 37** :

$\left]-1,\dfrac{7}{2}\right[$ (1) $\quad]-\infty,-3[\cup]5,+\infty[$ (2)

$]-\infty,-\dfrac{1}{4}[\cup]1,+\infty[$ (3) $\quad [-9,1]$ (4)

$\left[-9-6\sqrt{2},-9+6\sqrt{2}\right]$ (5) $\quad]1,7[$ (6)

$\{3\}$ (7) $\quad]-\infty,-1[$ (8)

$]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[$ (9) $\quad]-\infty,-1[\cup]5/2,+\infty[$ (10)

$[1,7]$ (11) $\quad \emptyset$ (12)

$]-\infty,-2[\cup]2/3,+\infty[$ (13)

Si $m>\dfrac{1}{2}$ alors on trouve $]-\infty,\dfrac{1}{2}]\cup]m,+\infty[$ pour l'équation (14) (autre cas analogue) ; et si $m=\dfrac{1}{2}$ tout réel distinct de $\dfrac{1}{2}$ convient.

Réponse de l'**exercice 38** : $5; \sqrt{3}-1; 2-\sqrt{3}; |3-a|$

Réponse de l'**exercice 39** : $a=20; b=9+4\sqrt{5}; c=12\sqrt{7}; d=12; e=9-\dfrac{10\sqrt{2}}{3}; f=50-25\sqrt{3}; g=10; h=2\sqrt{2}$

Réponse de l'**exercice 40** :

$$a=-(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \qquad b=-\frac{1}{2}(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

$$c=\frac{1}{2}(4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}) \qquad d=3-2\sqrt{2}$$

$$e=\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2 \qquad f=1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$$

Réponse de l'**exercice 43** :

(1) $-1\leqslant x\leqslant 7$ (2) $x\leqslant -3$ ou $x\geqslant 2$ (3) toujours vrai !

(4) $x\notin]-4;-\dfrac{2}{3}[$ (5) $-2\leqslant x\leqslant 5$

Réponse de l'**exercice 44** :

1. $4,8<a+b<5 \quad 5,12<ab<5,61 \quad \dfrac{3,2}{1,7}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{3,3}{1,6}$
2. $-1,7<a+b<-1,5 \quad -5,61<ab<-5,12 \quad -\dfrac{3,3}{1,6}<\dfrac{a}{b}<-\dfrac{3,2}{1,7}$
3. $-5<a+b<-4,8 \quad 5,12<ab<5,61 \quad \dfrac{3,2}{1,7}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{3,3}{1,6}$

Réponse de l'**exercice 47** : $0<b\leqslant b+1$ donc $\dfrac{1}{b+1}\leqslant\dfrac{1}{b}$ etc.

Réponse de l'**exercice 48** : Si $a<b$ alors $\dfrac{a-1}{b-1}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+1}{b+1}$.

Réponse de l'**exercice 49** : Déjà, $1\leqslant a\leqslant 2$ et $-3\leqslant b\leqslant -2$ donc $-2\leqslant a+b\leqslant 0$.
Ensuite, $1\leqslant a'\leqslant 2$ et $-3\leqslant b'\leqslant -2$ donc $2\leqslant -b'\leqslant 3$. Comme $-b'\geqslant 0$, on peut multiplier les inégalités pour obtenir $2\leqslant -a'b'\leqslant 6$, d'où $-6\leqslant a'b'\leqslant -2$. D'où $-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{a'b'}\leqslant -\dfrac{1}{6}$.
Ainsi, comme $a+b$ est négatif, on en déduit que

$$0\leqslant\frac{a+b}{a'b'}\leqslant 1.$$

Réponse de l'**exercice 50** : Soient x et y deux réels positifs. Alors
$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x+y+2\sqrt{xy} \geqslant x+y,$$
donc, par croissance de la fonction racine carrée,
$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \geqslant \sqrt{x+y}.$$

Réponse de l'**exercice 51** :

1. On sait que $(a-b)^2 \geqslant 0$, donc $a^2+b^2-2ab \geqslant 0$, donc $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, d'où $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
2. Par la question précédente, en prenant $a = \dfrac{x}{\sqrt{\lambda}}$ et $b = \sqrt{\lambda}y$, $2ab \leqslant a^2+b^2$, d'où $2xy \leqslant \dfrac{x^2}{\lambda} + \lambda y^2$.
3. Déjà, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \geqslant 2ab \geqslant 0$, et, de même, $(a+c)^2 \geqslant 2ac \geqslant 0$ et $(b+c)^2 \geqslant 2bc \geqslant 0$, d'où en multipliant les inégalités (car les quantités sont positives !),
$$(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2 \geqslant 8a^2b^2c^2,$$
d'où l'inégalité désirée en prenant la racine carrée.

Réponse de l'**exercice 52** :

1. Le polynôme du second degré $-x^2+x$ atteint un maximum en $\dfrac{1}{2}$, et ce maximum faut $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. Ceci assure que pour tout réel x, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
2. On sait que $a-a^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ et $b-b^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $a-a^2+b-b^2 \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc $a+b \leqslant a^2+b^2+\dfrac{1}{2}$.
3. Supposons que ce n'est pas le cas. Alors $a(1-b) > \dfrac{1}{4} \geqslant 0$, $b(1-c) > \dfrac{1}{4} \geqslant 0$ et $c(1-a) > \dfrac{1}{4} \geqslant 0$ donc, les quantités étant toutes strictement positives,
$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{4^3},$$
ce qui est absurde car, par la question précédente,
$$a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leqslant \frac{1}{4^3}.$$
D'où l'inégalité demandée.

Réponse de l'**exercice 53** : Déjà, $(a+b)^2-4ab = (a-b)^2 \geqslant 0$ donc $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ donc $\dfrac{ab}{a+b} \leqslant \dfrac{a+b}{4}$. De même, $\dfrac{bc}{b+c} \leqslant \dfrac{b+c}{4}$ et $\dfrac{ac}{a+c} \leqslant \dfrac{a+c}{4}$. En sommant ces trois inégalités, on obtient l'inégalité désirée.

Réponse de l'**exercice 54** :

1. Soit $a > 0$. **Première méthode.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que (si vous n'avez jamais vu cette formule, vous la verrez cette année !)
$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = 1+an+\binom{n}{2}a^2+\cdots+a^n \geqslant 1+an.$$
Deuxième méthode. Démontrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la proposition
$$(1+a)^n \geqslant 1+an \qquad (\mathcal{P}_n)$$
est vraie.
Initialisation. $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1$, donc l'initialisation est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors
$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a) \geqslant (1+an)(1+a),$$

par hypothèse de récurrence. Mais $(1+an)(1+a) = 1+a+an+a^2n = 1+a(n+1)$, d'où l'hérédité.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

2. **Méthode 1 pour la première inégalité.** Remarquons que $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n \times (2n-1) \times \cdots \times n+1}{n \times (n-1) \times \cdots \times 1}$.
Or, $2n-1 \geqslant 2(n-1)$, $2n-2 \geqslant 2(n-2)$, etc, si bien que
$$\frac{2n \times (2n-1) \times \cdots \times n+1}{n \times (n-1) \times \cdots \times 1} \geqslant \frac{2n \times 2(n-1) \times 2(n-2) \times 2(n-(n-1))}{n \times (n-1) \times 1} = 2^n.$$
Méthode 2. (récurrence) Démontrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la proposition
$$2^n \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n} \qquad (\mathcal{P}_n)$$
est vraie.
Initialisation. $\binom{0}{0} = 1$ et $2^0 \leqslant 1 \leqslant 2^{2\times 0}$, d'où l'initialisation.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors
$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}$$
Par hypothèse de récurrence, $2^n \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$. Ensuite,
$$\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \geqslant \frac{(2n+2)(n+1)}{(n+1)^2} = 2,$$
et
$$\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \leqslant \frac{(2n+2)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4,$$
d'où $2^n \times 2 \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n} \times 4$, c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$!
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Réponse de l'**exercice 55** : On fixe un réel x.

1. Prouvons que $\frac{2}{3} \leqslant \frac{3+\cos x}{2+\cos x} \leqslant 4$.
Comme $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, on a $2 \leqslant 3+\cos(x) \leqslant 4$ et $1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$ d'où par décroissance de la fonction inverse, on trouve $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\cos(x)} \leqslant 1$ et comme tous les termes de l'inégalité
$$2 \leqslant 3+\cos(x) \leqslant 4$$
sont positifs, on obtient par produit que $\boxed{\frac{2}{3} \leqslant \frac{3+\cos x}{2+\cos x} \leqslant 4.}$

2. Montrons que $\frac{4}{3} \leqslant \frac{3+\cos x}{2+\cos x} \leqslant 2$.
On note que $\frac{3+\cos x}{2+\cos x} = 1 + \frac{1}{2+\cos(x)}$ et comme ci-dessus, on a $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\cos(x)} \leqslant 1$.
Par somme, $\frac{4}{3} \leqslant 1 + \frac{1}{2+\cos x} \leqslant 2$ d'où $\boxed{\frac{4}{3} \leqslant \frac{3+\cos x}{2+\cos x} \leqslant 2.}$

Réponse de l'**exercice 56** :

1. $4\ln 2 \quad 9\ln 2 \quad -3\ln 2 \quad \dfrac{1}{2}\ln 2 \quad 3\ln 2$
2. $2\ln 2+2\ln 3 \quad -\ln 3-2\ln 2 \quad 2\ln 3-2\ln 2 \quad \ln 3+11\ln 2$
3. $3\ln 5+2\ln 2 \quad -2\ln 5+4\ln 2 \quad 2\ln 5-2\ln 2 \quad -2\ln 2-2\ln 5$

Réponse de l'**exercice 58** : on trouve $y = 17+12\sqrt{2}$

Réponse de l'**exercice 59** : $A = B = 0$

Réponse de l'**exercice 60** :
$8 \quad \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{3} \quad \dfrac{1}{9} \quad -\dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{5}$

Réponse de l'**exercice 62** : dans les deux cas, si x est solution de l'équation considérée, alors x vérifie $x^2+13x-26=0$. Ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13+\sqrt{273}}{2}$. Or $-x_1-5>0$ et $-x_2-5<0$, donc le premier membre de ces deux équations n'est pas défini en x_2 et x_1 est la seule solution possible pour les deux équations. Pour le second membre, on a : $\dfrac{x_1-61}{x_1+7}>0$ mais $x_1-61<0$ donc la première équation n'admet aucune solution et la seconde en admet une seule, à savoir x_1.

Réponse de l'**exercice 63** :
$a=\dfrac{3}{2} \quad b=-2 \quad c=\dfrac{1}{\ln 2} \quad d=-17 \quad f=1 \quad g=-1 \quad h=e$

Réponse de l'**exercice 64** :
la fonction est impaire ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

Réponse de l'**exercice 65** :
on trouve : $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x>1 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x<1 \\ -1 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x<-1 \end{cases}$

Réponse de l'**exercice 66** :
$$\begin{array}{llll} (1) & x \geqslant \dfrac{\ln 12+5}{3} & x\in[0,1] & (2) \\ (3) & x \geqslant \dfrac{2}{e} & x \geqslant -\dfrac{1}{12} & (4) \end{array}$$

Réponse de l'**exercice 67** : la fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$; elle est π-périodique et impaire, strictement croissante sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, de limite $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes de cet intervalle.

Réponse de l'**exercice 68** :
$\mathcal{S}_1=\{k\pi ; k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} ; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_2=\left\{\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{5} ; k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_3=\left\{\dfrac{2\pi}{3}+k\dfrac{4\pi}{3} ; k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{2\pi}{5}+k\dfrac{4\pi}{5} ; k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_4=\emptyset$
$\mathcal{S}_5=\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} ; k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{\pi}{10}+k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\mathcal{S}_6 = \left\{\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_7 = \left\{\frac{5\pi}{24} + \frac{5k\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 5k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_8 = \left\{\frac{\pi}{22} + \frac{2k\pi}{11}; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_9 = \{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_{10} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathcal{S}_{11} = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

Réponse de l'**exercice 70** :
$(S_1) x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$ $(S_2) x = \frac{2\pi}{3}$

Réponse de l'**exercice 71** :
$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$ $\quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$ $\quad \tan\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} + 2$

Réponse de l'**exercice 72** :
$\frac{\sin 2a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\cos a} = \frac{1}{\cos a}$ pour $a \notin \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Réponse de l'**exercice 73** :
$\sin x + \cos x = 1 \iff \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}$,
d'où les solutions $\mathcal{S} = \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Pour la seconde équation, on trouve $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Réponse de l'**exercice 74** : Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$ et donc $2\cos^2(\pi/8) = \cos(\pi/4) + 1 = \sqrt{2}/2 + 1$. Ainsi $4\cos^2(\pi/8) = \sqrt{2} + 2$. On résout cette équation et on trouve deux solutions qui sont $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$ et $-\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$, or $\cos(\pi/8) \geqslant 0$ donc $\cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$.

Réponse de l'**exercice 75** : $[0, \pi/3]$

Réponse de l'**exercice 76** : $[\pi/15, 11\pi/15] \cup [-14\pi/15, -4\pi/15]$

Réponse de l'**exercice 77** :

1. On considère x un réel.
   (a) $\boxed{A = \cos(x).}$
   (b) $\boxed{B = -\sin(x).}$
   (c) $\boxed{C = \cos(x).}$
   (d) $\boxed{D = \sin(x).}$
   (e) $\boxed{E = -\sin(x) - \cos(x).}$
   (f) $\boxed{F = \cos(x) - \sin(x).}$

2. (a) Soit $(A) : \sin(x) = \sin(\pi - 3x)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (A) \text{ est } \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.}$$

(b) Soit $(B) : \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (B) \text{ est } \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

(c) Soit $(C) : \cos(2x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (C) \text{ est } \left\{\frac{2\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

(d) Soit $(D) : \cos(x) = \sin\left(\frac{7x}{5}\right)$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (D) \text{ est } \left\{\frac{5\pi}{24} + \frac{5k\pi}{6} \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 5k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$

3. Soit a un réel vérifiant $\sin(a) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant 0$.
Par conséquent, comme cos est une fonction positive sur $[-\pi/2, 0]$, $\cos(a)$ est positif et comme $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, on a $\cos(a) = \sqrt{1 - \sin^2(a)}$ d'où $\cos(a) = \sqrt{1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ soit

$$\boxed{\cos(a) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}}$$

Réponse de l'**exercice 78** : $a = 24 + 7i \quad b = 8 - 6i \quad c = 7 \quad d = 1 - i \quad e = \frac{3}{11} + i\frac{\sqrt{2}}{11} \quad f = \frac{-1}{3} + i\frac{-\sqrt{2}}{3} \quad g = \frac{-4}{13} + i\frac{-19}{13} \quad h = 3i \quad k = \frac{12+9i}{25} \quad l = \frac{8+i}{5} \quad m = \frac{9}{10} + i\frac{23}{10}$

Réponse de l'**exercice 79** : $\overline{Z} = 2i + 3\overline{z}; \overline{Z} = 3 - i + 2i\overline{z}; \overline{Z} = (2 + i\overline{z})(2\overline{z} - 4 - 3i); \overline{Z} = \frac{1 - 2i + i\overline{z}}{-5i + 2\overline{z}}$

Réponse de l'**exercice 80** : $\mathrm{e}^{i\alpha} \times \mathrm{e}^{i\alpha'} = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))(\cos(\alpha') + i\sin(\alpha')) = (\cos(\alpha)\cos(\alpha') - \sin(\alpha)\sin(\alpha')) + i(\sin(\alpha)\cos(\alpha') + \sin(\alpha')\cos(\alpha)) = \cos(\alpha + \alpha') + i\sin(\alpha + \alpha') = \mathrm{e}^{i(\alpha+\alpha')}$; $\frac{1}{\mathrm{e}^{i\alpha}} = \frac{1}{\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)} = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha) = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \mathrm{e}^{-i\alpha} = \overline{\mathrm{e}^{i\alpha}}$

Réponse de l'**exercice 81** :
$a = 1 \quad b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad c = 1 \quad d = -1 \quad f = 1 \quad g = -i = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$
$h = -i \quad j = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} \quad k = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \quad l = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} \quad m = \mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{4}}$

Réponse de l'**exercice 83** :
$\omega^{2016} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$

Réponse de l'**exercice 85** : $j^3 = e^{2i\pi} = 1$; $1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$
$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$ donc $z_1 - 1 = j$ et $z_2 - 1 = j^2$

D'où $(z_1-1)^{n+2}+z_1^{2n+1}=j^{n+2}+e^{\frac{2i\pi n+i\pi}{3}}=j^n(j^2+e^{\frac{i\pi}{3}})=j^n(j^2+j+1)=0$;
et $(z_2-1)^{n+2}+z_2^{2n+1}=j^{2n+4}+e^{\frac{-2i\pi n-i\pi}{3}}=j^{2n}(j+e^{\frac{-i\pi}{3}})=j^{2n}(j+j^2+1)=0$. Enfin, $(1+j)^3+(1+j^2)^3=(-j^2)^3+(-j)^3=-j^6-j^3=-2$

Réponse de l'**exercice 86** :

1. On pose $z=e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Calculons $1+z+z^2+z^3+z^4$.
   On note que $z\neq 1$ donc par somme de termes d'une suite géometrique, on a $1+z+z^2+z^3+z^4=\dfrac{z^5-1}{z-1}$ et comme z est une racine 5-ème de l'unité (c'est-à-dire $z^5=1$), on obtient $\boxed{1+z+z^2+z^3+z^4=0.}$
2. On note $1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ est la partie réelle de $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}e^{i\frac{8\pi}{5}}=1+z+z^2+z^3+z^4$ donc d'après le résultat de la question **1)**, on a
   $$\boxed{1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=0.}$$
3. (a) On note que $\frac{8\pi}{5}=2\pi-\frac{2\pi}{5}$ ce qui donne $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ d'où $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ mais comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-1$, on trouve $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2$.

   (b) On note que $\frac{6\pi}{5}=2\pi-\frac{4\pi}{5}$ donc $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et comme $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$, on obtient que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. De ce fait, on a $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

   On en déduit que
   $$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2 \text{ et } \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right).}$$
   Preuve alternative. On peut répondre à cette question en appliquant la relation $\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. En effet, on a

   (a) $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=2\cos(\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ soit $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=-2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ mais comme $\pi-\frac{2\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}$, on a $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ mais en utilisant la relation $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-1$, on obtient la première égalité ;

   (b) $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=2\cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et la deuxième égalité en découle.
4. Déterminons la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
   On note tout d'abord que $\frac{\pi}{5}$ est dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc par décroissance du cos sur cet intervalle,

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \geqslant 0$. On sait d'après la question **1** que $1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=0$. Or, d'après la question **3)**, on a :

$$1+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=1+4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

donc on a :

$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-1=0.$$

Ainsi, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est une solution réelle positive de l'équation $4X^2-2X-1=0$. Or, les solutions de cette équation sont $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot$ Or, $\frac{1-\sqrt{5}}{4}<0$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\cdot}$

Réponse de l'**exercice 87** : $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $(1+i\sqrt{3})^n$ est un réel positif si et seulement si $e^{i\frac{n\pi}{3}}$ est un réel positif, c'est-à-dire pour les entiers multiples de 6.

Réponse de l'**exercice 88** : $a^2+b^2=|a+i)|^2$, donc $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|a+ib|^2|c+id|^2=|(a+ib)(c+id)|^2=|(ac-bd)+i(ad+bc)|^2$ et ce dernier nombre est bien une somme de carrés d'entiers. En revanche $4=2^2+0^2$ et $2=1^2+1^2$ mais on ne peut pas écrire 6 comme une somme de carrés d'entiers.

Réponse de l'**exercice 89** : $S_1-iS_2+1=S_{2n+1}$ d'où $S_1=(-1)^n(n+1)-1$ et $S_2=\frac{1}{2}((-1)^n(2n+1)-1)$

Réponse de l'**exercice 90** : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Réponse de l'**exercice 91** :

1. oui, pour $t=0$
2. non, car on aurait $t=0$ et $t=-1$
3. oui pour $t=-1$
4. CNS $x+2y=5$ ce qui donne $t=1-y=\frac{1}{2}(x-3)$
5. $A(3,1)$ et $\vec{u}(2,-1)$, équation cartésienne $x+2y=5$

Réponse de l'**exercice 92** :

1. pas de solution
2. il y a une solution si et seulement si $a-3b+7=0$, et dans ce cas $t=b-2$
3. condition $2a=b$, auquel cas $t=1+a$

Réponse de l'**exercice 93** : (1) $b=3$ (2)$a-3b+7=0$ (3)$2a=b$

Réponse de l'**exercice 94** :

1. $x=0, y=3$
2. tous les couples (x,y) vérifiant $3x-y=1$
3. condition $m=10$, auquel cas tous les couples (x,y) vérifiant $2x+3y=5$,
4. $x=\frac{1}{5}(2+m)$ et $y=\frac{1}{5}(1-2m)$
5. si $m\neq-2$ alors $x=\frac{3+5}{2+m}$ et $y=\frac{-7}{2+m}$

Réponse de l'**exercice 95** : 1) $t = 0$ 2) oui $t = 1$ 3) non 4) $A(0, 1, 1)$ et $\vec{u}(2, -1, 1)$

Réponse de l'**exercice 96** :

1. B oui, C non - préciser les valeurs de λ et μ dans le premier cas
2. on ne trouve que $m = 0$

Réponse de l'**exercice 97** :

1. un plan ! passant par $A(1, 1, 0)$, de vecteur normal $\vec{n}(1, 2, 0)$ et donc dirigé par $\vec{u}(-2, 1, 0)$ et $\vec{v}(0, 0, 1)$
2. $\vec{n}$ est colinéaire au vecteur de coordonnées $(1, 1, -1)$ Equation cherchée $x + y - z = 2$
3. $A(4, 0, 0)$ $\vec{u}(-2, 1, 0)$ et $\vec{v}(3, 0, 1)$

Réponse de l'**exercice 98** :

1. ils ne sont pas parallèles !
2. $x = 2, z = -1$
3. $x = 2 - y, z = -1 - y$
4. droite passant par $A(2, 0, -1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1, 1, -1)$

Réponse de l'**exercice 99** : a)$x = 1 - 2y, y = y, z = -3y + 1$ b) $x = 1, y = 0, z = 1$ c) pas de solutions

Réponse de l'**exercice 100** : $0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, +\infty$

Réponse de l'**exercice 101** : -1 ; 0 ; -1 ; $\frac{1}{2}$; 2

Réponse de l'**exercice 102** : $0, 1, +\infty, 1, \frac{1}{2}, +\infty, \frac{1}{2}, 0$

Réponse de l'**exercice 103** :

$f_1' : x \mapsto 3(x-1)^2$ $f_2' : x \mapsto 6x(x^2-1)^2$ $f_3' : x \mapsto 6(x-1)$

$f_4' : x \mapsto 2x-3$ $f_5' : x \mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$ $f_6' : x \mapsto -\dfrac{5}{(2+x)^2}$

$f_7' : x \mapsto \dfrac{4}{(1-x)^2}$ $f_8' : x \mapsto 6x + \dfrac{1}{x^2}$ $f_9' : x \mapsto -3x^2+18x-26$

$g_1' : x \mapsto -3\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ $g_2' : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{(x^2-x+2)^2}$ $g_3' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

$g_4' : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ $g_5' : x \mapsto \dfrac{2}{5}\dfrac{x}{(x^2+1)^{\frac{4}{5}}}$ $g_6' : x \mapsto \dfrac{1}{(-x+2)^2}$

$g_7' : x \mapsto -2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ $g_8' : x \mapsto -2\cos(2x-\dfrac{\pi}{6})$ $g_9' : x \mapsto 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$g_9' : x \mapsto 2\cos x(1-3\sin^2 x)$

$h_1' : x \mapsto -6\sin x(2\cos x - 1)$ $h_2' : x \mapsto \dfrac{-\sin^3 x}{(1+\cos^2 x)^2}$ $h_3' : x \mapsto 4\cos^2 x + \cos x - \sin x - 2$

$h_4' : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}$ $h_5' : x \mapsto \dfrac{5}{5x-1}$ $h_6' : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$

$h_7' : x \mapsto \dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$ $h_8' : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ $h_9' : x \mapsto \dfrac{2}{2x-7}$

$u_1' : x \mapsto \ln x$ $u_2' : x \mapsto 3\mathrm{e}^{3x}$ $u_3' : x \mapsto (2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x+1}$

$u_4' : x \mapsto \cos x \mathrm{e}^{\sin x}$ $u_5' : x \mapsto -2\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ $u_6' : x \mapsto (1+\ln x)\mathrm{e}^{x\ln x}$

$u_7' : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1-\dfrac{1}{x})$ $u_8' : x \mapsto \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1}$ $u_9' : x \mapsto \dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$

$v_1' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ $v_2' : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)^{\frac{3}{2}}}$

$v_3' : x \mapsto \cos x \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin x}(1-\sin x)^{3/2}}$ $v_4' : x \mapsto \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

Réponse de l'**exercice 104** :

$$x \mapsto -\frac{1}{x^2} \quad x \mapsto -\frac{2}{x^3} \quad x \mapsto -3\frac{1}{x^4} \quad x \mapsto -4\frac{1}{x^5} \quad \dots$$
$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} \quad x \mapsto -\frac{2}{(x-1)^3} \quad x \mapsto \frac{3}{(x-1)^4} \quad x \mapsto -\frac{4}{(x-1)^5} \quad \dots$$
$$x \mapsto -2\frac{1}{(2x+1)^2} \quad x \mapsto -\frac{4}{(2x+1)^3} \quad x \mapsto -\frac{6}{(2x+1)^4} \quad x \mapsto -\frac{8}{(2x+1)^5} \quad \dots$$

Réponse de l'**exercice 105** : $x \mapsto \ln|x|$

Réponse de l'**exercice 106** :
A une constante additive près, on trouve :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{17}x^{17} - \dfrac{5}{2}x^{14} + \dfrac{7}{6}x^{12} - \dfrac{1}{3}x^9 + 4x^5 + 14x^4 + 17x^3 + 9x^2 + x$
2. $F : x \mapsto \ln|x|$
3. $F : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$
4. $F : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2}$
5. $F : x \mapsto -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x^3}$
6. $G : x \mapsto -\ln|1-x|$
7. $G : x \mapsto -\dfrac{1}{x-1}$

8. $G : x \mapsto \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}$
9. $G : x \mapsto -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^3}$
10. $H : x \mapsto \frac{1}{2}\ln|2x+1|$
11. $H : x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{2x+1}$
12. $H : x \mapsto -\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+1)^2}$
13. $H : x \mapsto -\frac{1}{6}\frac{1}{(2x+1)^3}$

Réponse de l'**exercice 107** : A une constante additive près :

$a)x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{x}$	$b)x \mapsto \frac{1}{20}(2x^2+1)^5$	$c)x \mapsto \frac{1}{4}(x-1)^4$
$e)x \mapsto \frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x$	$f)x \mapsto -\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$	$g)x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x$
$h)x \mapsto -\frac{1}{2}\cos 2x$	$i)x \mapsto \frac{1}{3}\sin 3x$	$j)x \mapsto x - \tan x$
$k)x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x^2+2x|$	$l)x \mapsto \frac{1}{6}(x^2-1)^6$	$m)x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2)}$
$n)x \mapsto \ln|x-3|$	$o)x \mapsto -\frac{1}{x^2+x+3}$	$p)x \mapsto \frac{1}{3}\ln|x^3-1|$
$q)x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$	$r)x \mapsto \frac{1}{5}\ln(5\mathrm{e}^x+1)$	$s)x \mapsto \frac{3}{8}(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{4}{3}}$
$t)x \mapsto -\ln|\cos x|$	$u)x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$	$v)x \mapsto 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
$w)x \mapsto \frac{15}{2}x^{\frac{2}{3}}$	$y)x \mapsto -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$	$z)x \mapsto -2\sqrt{\mathrm{e}^x}$
$\alpha)x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$	$\beta)x \mapsto -\mathrm{e}^{\cos x}$	$\gamma)x \mapsto -\frac{3}{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$
$\delta)x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^x}}$	$\varepsilon)x \mapsto \ln|\cos x + \sin x|$	

Réponse de l'**exercice 108** :

$$I_1 = \ln 2 \qquad I_2 = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}) \qquad I_3 = \frac{3}{2}\ln 10 \qquad I_4 = 2\ln\frac{63}{55} \qquad I_5 = 0$$

Réponse de l'**exercice 109** :

1. $x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{2}$
2. $x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$
3. $x \mapsto \frac{(\ln(x))^{1-a}}{1-a}$

Réponse de l'**exercice 110** :

1. $F(x) = \frac{2}{5}(x+2)^2\sqrt{3x+6}$
2. $F(x) = -\ln(1+\cos^2(x))$
3. $f(x) = -cos(\ln(x))$
4. $f(x) = \frac{1}{\ln(2)}\left(2^x - 2^{-x}\right)$

5. $f(x) = 2\sqrt{\tan x}$

Réponse de l'**exercice 111** :

1. $I_1 = [te^t - e^t]_0^1 = 1 \quad ; \quad I_1' = [t^2e^t]_0^1 - 2I_1 = e - 2$
2. $I_2 = [t\ln(t) - t]_1^2 = 2\ln(2) - 1$
3. $I_3 = [\sin(t)e^t - \cos(t)e^t]_0^\pi - I_3 \quad ; \quad I_3 = \dfrac{e^\pi + 1}{2}$

Réponse de l'**exercice 112** :

1. $\dfrac{1}{5}\left[e^t\sin(2t) - 2e^t\cos(2t)\right]_0^{2\pi} = \dfrac{2}{5}(1 - e^{2\pi})$
2. $[-x\cos(x) + \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$
3. $\left[\left(\dfrac{x^2}{2} + 3x\right)\ln(x) - \left(\dfrac{x^2}{4} + 3x\right)\right]_1^4 = 40\ln(2) - \dfrac{51}{4}$
4. $\left[\left(t^3 - 3t^2 + 6t - 6\right)e^t\right]_0^2 = 2e^2 + 6$

Réponse de l'**exercice 113** :

1. $[x\ln(x)\sin(x) + \cos(x)]_1^\pi = -1 - \cos(1)$
2. $\left[\dfrac{1}{2}t^2e^{t^2} - \dfrac{1}{2}e^{t^2}\right]_0^{\sqrt{\ln(2)}} = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$

Réponse de l'**exercice 114** :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

Réponse de l'**exercice 115** :

$$A(A - I_3) = (A - I_3)A = 2I_3$$

donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2}(A - I_3)$. Attention, il faut vérifier que l'inverse proposé est bien inverse de A à droite ET à gauche !

Réponse de l'**exercice 116** : $40I_4$; $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Réponse de l'**exercice 117** : $A_1^2 = 0$ donc $A_1^n = 0$ dès que $n \geqslant 2$.
Par récurrence $A_2^{2p} = A_2$ et $A^{2p+1} = A_2$.
Par récurrence $A_3^n = A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ n-1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Réponse de l'**exercice 118** :

1. $\lambda M + \lambda' M'$ a la bonne tête en posant $a'' = \lambda a + \lambda' a'$, et $b'' = \lambda b + \lambda' b'$
2. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ alors $\mathcal{A}$ est exactement l'ensemble des matrices qui s'écrivent comme combinaison linéaire de A et B.
3. A^2 est obtenue pour $a = -2, b = 1$, B^2 est obtenue pour $a = 1, b = -2$, AB et BA sont égales et obtenues pour $a = b = -1$.
   Prenons deux matrices de $\mathcal{A}$, $M = aA + bB$ et M'. Alors leur produit s'écrit
   $$MM' = aa'A^2 + ab'AB + a'bBA + bb'B^2$$
   donc MM' s'écrit comme combinaison linéaire de A et B, donc est dans $\mathcal{A}$.

4. Si une matrice M de $\mathcal{A}$ a son inverse dans $\mathcal{A}$ alors I_3 appartient à $\mathcal{A}$ d'après 3), or on ne peut avoir simultanément $a = b = 0$ et $-(a+b) = 1$

Réponse de l'**exercice 119** :

1. Non, car la matrice nulle ne peut pas s'écrire sous la forme $M(x)$ puisqu'on ne peut avoir à la fois $x = 0$ et $x + 1 = 0$
2. $M(x)M(y) = M(2xy + x + y)$
3. On cherche x vérifiant $2x^2 + 2x = 1$ ce qui donne deux solutions réelles.
4. Si à un certain rang n il existe un réel u_n tel que $M^n(1) = M(u_n)$ alors en posant $u_{n+1} = 3u_n^2 + 1$ on démontre la propriété au rang $n + 1$ ce qui démontre que la propriété est héréditaire (on initialise avec $u_0 = 0$).
   Quant à l'unicité, si $M(x) = M(y)$ alors $x = y$!

Réponse de l'**exercice 120** :

1. $P^2 = P \quad Q^2 = Q \quad PQ = QP = [0] \quad A =$
2. On trouve $a = -3$ et $b = 3$ en résolvant un système de 9 équations à 2 inconnues, ce qui rend miraculeux l'existence d'une solution
3. Si vous avez pensé à utiliser la formule du binôme, avez-vous bien vérifié les hypothèses ?

Réponse de l'**exercice 121** : Pour composer un menu, on choisit :
1 entrées parmi 2 entrées possibles - 2 possibilités,
puis 1 plat parmi 3 plats possibles - 3 possibilités,
puis 1 dessert parmi 4 desserts possibles - 4 possibilités :
$\boxed{2 \times 3 \times 4 = 24 \text{ possibilités}}$.

Réponse de l'**exercice 122** :

1. Un classement est une permutation de l'ensemble des 41 élèves : $\boxed{41! \text{ possibilités}}$.
2. On fixe la place de l'élèves NIBUCHIT (1ère place),
   puis on choisit la place des 40 élèves restants parmi les 40 places restantes :
   IL y a $\boxed{40! \text{ possibilités}}$ (nombre de permutations de l'ensemble des 40 élèves restantes).
3. On choisit la place des 15 élèves jouant au rugby parmi les 16 premières places - 15! possibilités (nombre de permutations de l'ensemble des 15 élèves jouant au rugby),
   puis on choisit la place des 26 élèves jouant au foot parmi les 26 places restantes - 26! possibilités (nombre de permutations de l'ensemble des 26 élèves jouant au foot) :
   IL y a $\boxed{15!26! \text{ possibilités}}$.

Réponse de l'**exercice 123** : Le nombre de trajets possibles est le nombre de 2-arrangements dans l'ensemble des n villes : $\boxed{A_n^2 = n(n-1)}$

Réponse de l'**exercice 124** : Le nombre de poignées de mains échangées est le nombre de 2-combinaisons dans l'ensemble des n personnes : $\boxed{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}}$

Réponse de l'**exercice 125** :

1. Un tirage est une 5-combinaison de l'ensemble des 32 cartes : $\begin{pmatrix} 32 \\ 5 \end{pmatrix}$ tirages possibles.
2. L'ensemble des tirages possibles est $E = A \cup B$, avec A ensemble des tirages composés de 5 carreaux et B ensemble des tirages composés de 5 piques.
   Un élément de A est une 5-combinaison de l'ensemble des 8 carreaux, donc $|A| = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

De même, $|B| = \binom{8}{5}$.

L'union est disjointe, donc $\boxed{|E| = |A| + |B| = 2\binom{8}{5}}$.

3. Pour composer un tel tirage, on choisit :
   2 carreaux parmi les 8 carreaux possibles - $\binom{8}{2}$ possibilités,
   puis 3 piques parmi les 8 piques possibles - $\binom{8}{3}$ possibilités :
   $\boxed{\binom{8}{2}\binom{8}{3} \text{ possibilités}}$
4. L'ensemble des tirages possibles est $F = E \setminus A$, avec E l'ensemble de tous les tirages possibles, et A l'ensemble des tirages qui n'ont aucun roi.
   Un élément de A est une 5-combinaison de l'ensemble des 28 cartes qui ne sont pas des rois, donc $|A| = \binom{28}{5}$,
   donc $|F| = |E| - |A| = \binom{32}{5} - \binom{28}{5}$.
5. L'ensemble des tirages possibles est $E = A \cup B$, avec A ensemble des tirages qui ne contiennent aucun roi et B ensemble des tirages qui contiennent exactement un roi.
   $|A| = \binom{28}{5}$ (question 4).
   Pour composer un tirage de B :
   on choisit 1 roi parmi les 4 rois possibles - 4 possibilités,
   puis on choisit 4 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des rois - $\binom{28}{4}$ possibilités :
   $|B| = 8\binom{24}{4}$.
   L'union est disjointe, donc $\boxed{|E| = |A| + |B| = \binom{28}{5} + 4\binom{28}{4}}$.
6. L'ensemble des tirages possibles est $E = A \cup B$, avec A ensemble des tirages qui contiennent exactement deux rois, dont le roi de pique, et 3 piques et B ensemble des tirages qui contiennent exactement deux rois qui ne sont pas des piques et 3 piques.
   Pour composer un tirage de A :
   on pioche le roi de pique - 1 possibilité,
   puis on choisit 1 roi parmi les 3 rois restants - 3 possibilités,
   puis on choisit 2 piques parmi les 7 piques restants - $\binom{7}{2}$ possibilités :
   puis on choisit 1 carte parmi les 21 cartes restantes qui ne sont ni des rois ni des piques - 21 possibilités :
   $|A| = 3 \times 21\binom{7}{2}$.
   Pour composer un tirage de B :
   on choisit 2 rois parmi les 3 rois qui ne sont pas des piques - $\binom{3}{2} = 3$ possibilités,
   puis on choisit 3 cartes parmi les 7 piques qui ne sont pas des rois - $\binom{7}{3}$ possibilités :

$|B| = 3\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

L'union est disjointe, donc $\boxed{|E| = |A| + |B| = 3 \times 21\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}}$.

Réponse de l'**exercice 126** :

1. Le nombre d'anagramme est le nombre de permutations des 3 lettres du mot "MOT" : $\boxed{3! = 6}$.
2. Pour former un anagramme du mot "RIGOLO" :
   on choisit 2 emplacements pour les 2 "O" parmi les 6 emplacements possibles - $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ possibilités,
   puis on choisit la place des 4 lettres restantes parmi les 4 emplacements restants - $4! = 24$ possibilités :
   il y a $24\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ anagrammes.
3. Pour former un anagramme du mot "ANAGRAMME" :
   on choisit 3 emplacements pour les 3 "A" parmi les 9 emplacements possibles - $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ possibilités,
   puis on choisit 2 emplacements pour les 2 "M" parmi les 6 emplacements restants - $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ possibilités,
   puis on choisit la place des 4 lettres restantes parmi les 4 emplacements restants - $4! = 24$ possibilités :
   il y a $24\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ anagrammes.

Réponse de l'**exercice 127** : $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Réponse de l'**exercice 128** :

1. (a) $\frac{1}{6}$
   (b) $\frac{1}{9}$
   (c) $\frac{5}{36}$
2. $\frac{31}{32}$
3. $\frac{5}{18}$
4. $\frac{5}{2^2 \times 3^4}$

Réponse de l'**exercice 129** :

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{1}{15}$

Réponse de l'**exercice 130** : $\dfrac{5}{63}$

Réponse de l'**exercice 131** :

1. $P(N_2) = \dfrac{1}{3}$
2. $P(N_2) = \dfrac{17}{45}$

Réponse de l'**exercice 132** :

1. $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \dfrac{16}{175}$
2. $P(B_3) = \dfrac{3}{5}$
3. $P_{B_3}(B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{7}$

Réponse de l'**exercice 133** :

1. $P(E) = 0,01\% \times 1\% + 99,99\% = 0,1\%$
2. $P_T(M) = \dfrac{0,01\% \times 99\%}{0,1098\%} = 9\%$

Réponse de l'**exercice 134** :

1. $P(A \cap C) = \dfrac{1}{4} = P(A) \times P(C) \quad ; \quad P(B \cap C) = \dfrac{1}{4} = P(B) \times P(C).$
2. $P(A \cap B \cap C) = P(B \cap C) = \dfrac{1}{4} \neq P(A) \times P(B \cap C) = \dfrac{1}{8}$
   $P(A \cap (B \cup C)) = \dfrac{1}{4} \neq P(A) \times P(B \cup C) = \dfrac{1}{8}$

Réponse de l'**exercice 135** :

1. On remarque que $2023 \equiv 3[10]$, donc $2023^2 \equiv 9[10]$, donc $2023^4 \equiv 81[10] \equiv 1[10]$. Ensuite, $2021 = 4 \times 505 + 1$ donc
   $$2023^{2021} = 2023^{4\times 505+1} = (2023^4)^{505} \times 2023 \equiv 1 \times 3[10].$$
   Le dernier chiffre de l'écriture en base 10 de 2023^{2021} est donc 3.
2. Regardons les différentes puissances de 2 modulo 11 :
   $2^2 \equiv 4[11]$, $2^3 \equiv 8[11]$, $2^4 \equiv 5[11]$, $2^5 \equiv -1[11]$. Donc $2^{10} = (2^5)^2 \equiv (-1)^2[11]$. Ainsi,
   $$2^{123} = 2^{10\times 12+3} = (2^10)^{12} \times 2^3 \equiv 8[11]$$
   De même, $2^{121} \equiv 2[11]$. Ainsi
   $$\begin{aligned} 2^{123} + 2^{121} + 1 &\equiv 8 + 2 + 1[11] \\ &\equiv 0[11] \end{aligned}$$
   donc 11 divise $2^{123} + 2^{121} + 1$.
3. Remarquons que $3^2 = 9 \equiv 2[7]$, donc $3^{2n} \equiv 2^n[7]$. De plus, $3 \equiv -4[7]$, donc $3^{2n+1} = 3^{2n} \times 3 \equiv 2^n \times (-2^2)[7]$. Ainsi, $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0[7]$, donc 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Réponse de l'**exercice 136** :

1. Développons le second membre :
   $$\begin{aligned} &(a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab) \\ &= a^4 + 2a^2b^2 - 2a^3b + 2b^2a^2 + 4b^4 - 2ab^2 + 2a^3b + 2ab^3 - 4a^2b^2 \\ &= a^4 + 4b^4. \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Déjà, si $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 2[4]$, alors $n^4 + 4^n$ est pair, donc non premier.
Si $n \equiv 1[4]$, alors $n = 4p + 1$ et
$$n^4 + 4^n = n^4 + 4 \times (4^p)^4 = (n^2 + 2 \times 4^{2p} + 2 \times n \times 4^p)(n^2 + 2 \times 4^{2p} - 2 \times n \times 4^p),$$
qui n'est donc pas premier. (aucune des parenthèses n'égale 1)
Si $n \equiv 3[4]$ alors $n = 4p + 3$, $p \in \mathbb{N}$, et
$$n^4 + 4^n = n^4 + 4 \times (2 \times 4^p)^4,$$
d'où le résultat par le même procédé que précédemment !

Réponse de l'**exercice 137** :

1. Remarquons que $2^3 \equiv 8[7]$. Ainsi, $2^{3n} = (2^3)^n \equiv 1[7]$.
Donc $2^{3n} - 1 \equiv 0[7]$, donc 7 divise $2^{3n} - 1$.
2. Déjà, $2021 = 7 \times 288 + 5$. Ainsi, $2021 \equiv 5[7]$. Donc $2021^2 \equiv 25[7]$, i.e. $2021^2 \equiv 4[7]$, $2021^3 \equiv 6[7]$, i.e. $2021^3 \equiv -1[7]$.
Donc $2021^6 \equiv 1[7]$. On en déduit que, comme $2022 = 6 \times 337$, $2021^{2022} = (2021^6)^{337} \equiv 1[7]$.

Réponse de l'**exercice 138** :

1. Soit n un entier naturel. Alors $n^3+5n = n^3+6n-n = 6n+n(n^2-1) = 6n+n(n-1)(n+1)$.
Or, $6n$ est divisible par 6 et $(n-1)n(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs. Au moins un des entiers $n-1, n, n+1$ est divisible par 2 et un est divisible par 3. Ainsi, le produit $(n-1)n(n+1)$ est divisible par 6. Donc $n^3 + 5n$ est divisible par 6.
2. $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$. Ainsi, par les mêmes arguments que précédemment, $n^5 - n$ est divisible par 6. Mais $1^5 \equiv 1[5]$, $2^5 \equiv 2[5]$, $3^5 \equiv 3[5]$, $4^5 \equiv 4[5]$ donc, quelle que soit la congruence modulo 5 de n, $n^5 \equiv n[5]$. Ainsi, 5 divise aussi $n^5 - n$. Comme 5 et 6 sont premiers entre eux, $5 \times 6 = 30$ divise aussi $n^5 - n$.

Réponse de l'**exercice 139** :

1. Le pgcd vaut 15, $u = -1$, $v = 1$.
2. Le pgcd vaut 1, $u = -22$, $v = 7$.
3. Le pgcd vaut 1, $u = -23$, $v = 24$.
4. Le pgcd vaut 4, $u = 52$,v $= 25$.

Réponse de l'**exercice 140** : Déjà, 7 et 12 sont premiers entre eux, et on remarque que $-5 \times 7 + 3 \times 12 = 1$. Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs solution. Alors $7x + 12y = 1 = -5 \times 7 + 3 \times 12$, donc $7(x+5) = (3-y) \times 12$. Comme 7 et 12 sont premiers entre eux, 7 divise $3-y$, i.e. $3-y = 7k$, et 12 divise $x+5$, i.e. $x + 5 = 12\ell$, avec k et ℓ dans $\mathbb{Z}$. Mais alors $7 \times 12\ell = 7k \times 12$, donc $k = \ell$. Ainsi, $x = 12k + 5$ et $y = 3 - 7k$. Réciproquement, un couple (x, y) de la forme fonctionne, si bien que l'ensemble des solutions de l'équation diophantienne est
$$\{(-5 + 12k, 3 - 7k),\ k \in \mathbb{Z}\}$$
De même, en trouvant une solution particulière de $7x + 12y = 4$ (en multipliant une relation de Bézout par 4), on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation $7x + 12y = 4$ est
$$\{(-20 + 12k, 12 - 7k),\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Réponse de l'**exercice 141** :

1. Si ω_k vérifie la propriété (G) alors il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que $\omega_k^p = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors $e^{\frac{2ik\pi p}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Donc on dispose de $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{2k\pi p}{n} = \dfrac{2\pi}{n} + 2\ell\pi$, c'est-à-dire que
$$kp = 1 + \ell n,$$
d'où le résultat désiré !
2. Par le théorème de Bézout, on en déduit que k et n sont premiers entre eux.

3. Si k et n sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, il existe u et v tels que $uk + vn = 1$. Alors
$$\omega_k^u = e^{\frac{2iuk\pi}{n}} = e^{\frac{2i(1-vn)\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}} e^{-\frac{2ivn\pi}{n}} = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$
donc ω_k vérifie la propriété (G).